期末复习

2022年6月18日 星期六　　上午8:28

曲线曲面积分

- 第一型曲线积分
  - $\int_l \varphi(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t),z(t))\,|\vec r\,'(t)|\,dt$
    $= \int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$
  - 显式曲线 $y=y(x)$，$x\in[a,b]$.
    $\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$.
  - 极坐标 $r=r(\theta)$，$x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$.
    $\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta$
    $= \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$.
- 第一型曲面积分.
  - $dS = |\vec r_u'(u,v)\times \vec r_v'(u,v)|\,du\,dv = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.
    $E=|\vec r_\theta'|^2$，$G=|\vec r_\varphi'|^2$，$F=\vec r_\theta'\cdot\vec r_\varphi'$.
  - $\iint_S \varphi(x,y,z)\,dS = \iint_S \varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$
  - 显式曲面 $z=f(x,y)$，$\vec r=(x,y,f(x,y))$.
    $\vec r_x'=(1,0,\frac{\partial f}{\partial x})$，$\vec r_y'=(0,1,\frac{\partial f}{\partial y})$.
    $\iint_S \varphi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\,dx\,dy$.
- 第二型曲线积分.
  - $\int_{L_{AB}} \vec v\cdot d\vec r = \int_{L_{AB}} \vec\varphi(x,y,z)\cdot \vec r\,'\,dr$
    $= \int_{L_{AB}} (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot \vec\tau\,ds$　　$\left(\vec\tau=\frac{\vec r\,'(t)}{|\vec r\,'(t)|}\right)$
    $= \int_{L_{AB}} \overbrace{(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)}^{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma}\,ds$
    $= \int_{L_{AB}} \frac{1}{|\vec r\,'(t)|}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Qy'(t)+Rz'(t))\,dt$
    $= \int_{L_{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$
    $= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x,y,z)z'(t)]\,dt$
  - Green $\oint_{\partial D} P\,dx+Q\,dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$.
    面积 $\sigma(D) = \frac12\oint_{\partial D} -y\,dx+x\,dy = \oint_{\partial D} -y\,dx = \oint_{\partial D} x\,dy$
- 第二型曲面积分.
  - $\iint_S \vec v\cdot d\vec S = \iint_S \vec v\cdot\vec n\,dS$　→ 第一型曲面.
    $= \iint_S (P,Q,R)\cdot(\vec r_u'\times\vec r_v')\,du\,dv$
    $= \iint_S \begin{vmatrix} P & Q & R\\ x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\end{vmatrix}\,du\,dv$
    $= \iint_S P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$
    $= \iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$
    $= \iint_S P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\,dS$
  - 显式曲面 $z=f(x,y)$.　$\vec r=(x,y,f(x,y))$
    $\iint_S \vec v\cdot d\vec S = \iint_S \begin{vmatrix} P & Q & R\\ 1 & 0 & f_x'\\ 0 & 1 & f_y'\end{vmatrix}\,dx\,dy$
  - Gauss $\oiint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$
    $= \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial }+\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$
    $\oiint_S \vec v\cdot d\vec S = \iiint_V \nabla\cdot\vec v\,dV$.
  - Stokes $\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\\ dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\end{vmatrix}$

积分关系图

$$\begin{tikzcd}
\text{三重} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Gauss}"] \arrow[d] & \text{曲面} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Stokes}"] \arrow[dl] & \left\langle {(\mathrm{I}) \atop (\mathrm{II})} \right. \\
\text{二重} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Green}"] \arrow[d] & \text{曲线} \arrow[d, "\text{(与路径无关)}"] \arrow[dl] & \left\langle {(\mathrm{I}) \atop (\mathrm{II})} \right. \\
\text{定积分} \arrow[r, phantom, "="] & F(b)-F(a) &
\end{tikzcd}$$

$\int_{\partial\Omega} w = \int_\Omega dw$.

第二型曲线积分　$\int_L \vec A\cdot d\vec r = \int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_\alpha^\beta (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

Green　$\oint_{\partial D} P\,dx+Q\,dy = \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$

$S=\frac12\oint_{\partial D} -y\,dx+x\,dy = \oint_{\partial D} -y\,dx = \oint_{\partial D} x\,dy$

Gauss　$\oiint_{\partial\Omega} \vec A\cdot d\vec S = \iiint_\Omega (\vec\nabla\cdot\vec A)\,dV$

$\oiint_{\partial\Omega} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy = \iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,dV$

$V=\frac13\oiint_{\partial\Omega} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$

第二型曲面积分　$\iint_\Sigma \vec A\cdot d\vec S = \pm\iint_{D_{uv}} \begin{vmatrix} P & Q & R\\ x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\end{vmatrix}\,du\,dv$

Stokes　$\oint_{\partial\Sigma} \vec A\cdot d\vec r = \iint_\Sigma (\vec\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S$

$\oint_{\partial\Sigma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\,dS$

Fourier 分析

- Fourier 级数
  - 以 2π 为周期 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$
    Fourier 系数 $a_n=\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$
    $b_n=\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$
    $f(x)$ 分段可微 ⇔ Fourier 级数收敛.
    且处处连续 ⇔ 收敛至 $f(x)$.
  - 以 $2l$ 为周期 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$
    Fourier 系数 $a_n=\frac1l\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$
    $b_n=\frac1l\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$
  - 有限区间 $[a,b]$　$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a})$
    $a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx$
    $b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx$.
  - 复数形式 $\cos n\omega x=\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}$
    $\sin n\omega x=\frac{e^{in\omega x}-e^{in\omega x}}{2i}$　代入.
- 平方平均收敛
  - 对 $f(x)$，$\exists f_n(x)$ 使 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\,dx=0$，
    则 $f_n(x)$ 平方平均收敛于 $f(x)$.
  - Bessel 不等式 & Parseval 等式
    $\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$.
  - $\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx=\frac{a_0\tilde a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\tilde a_n+b_n\tilde b_n)$
    $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx$
- 广义 Fourier 级数.
  完备的标准正交系 $\varphi_n(x)$.
  $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$.

反常积分与含参变量的积分.

- 反常积分
  - 无穷区间上的积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$
  - 判定
    - Cauchy.
      对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $A_1,A_2>X$ 时，
      $|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx|<\varepsilon$.
    - 绝对 ⇒ 条件
    - 比较判别法 $\begin{cases} f(x)\le g(x)\ \ldots \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ \ldots\end{cases}$
      $*\,g(x)=\frac{1}{x^p}$. $p>1$ con.
    - Dirichlet　$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ 在 $[a,+\infty)$ 有界
      $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调 $\to0$.
    - Abel　$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.
      $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界.
  - 无界函数
    a 为瑕点，同 $+\infty$ 时处理.
- 含参变量的积分
  - $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$，$x\in[a,b]$，$u\in[\alpha,\beta]$.
    $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续，则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续.
  - 性质
    - $\int_\alpha^\beta\varphi(u)\,du=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)\,dx\,du$
      $=\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx$
    - $\varphi'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$
  - $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$.　$a(u),b(u)\in[a,b]$.
    $\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx+f(b(u),u)\,b'(u)-f(a(u),u)\,a'(u)$.
- 含参变量的反常积分
  - $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$，$x\in[a,+\infty)$，$u\in[\alpha,\beta]$.
  - 一致收敛：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $A>X$ 时，
    $|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx|<\varepsilon$ 对 $\forall u\in I$ 成立，
    则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 I 上一致收敛.
  - 判定
    - Cauchy
      对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X$，当 $A_1,A_2>X$ 时，
      $|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)\,dx|<\varepsilon$ 对 $\forall u\in I$ 成立.
    - Weierstrass
      $|f(x,u)|\le F(x)$ 对充分大 x，$\forall u$ 成立，
      且 $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ 可积.
    - 上确界 $\beta(A)=\sup|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx|$.
      $\lim_{A\to+\infty}\beta(A)=0$.
    - Dirichlet
      $\int_a^b f(x,u)\,dx\le M$ 对 $b\in[a,+\infty)$，$u\in I$ 成立
      $g(x,u)$ 对固定 u，对 x 单调 $\to0$.
    - Abel
      $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 u 一致收敛
      $g(x,u)$ 对固定 u，对 x 单调有界.
  - 性质
    - $f(x,u)$ 连续，$\varphi(u)$ 连续.
    - $\int_\alpha^\beta\varphi(u)\,du=\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx\,du$
      $=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx$
    - $\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$.　$f(x,u)$，$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 连续
      $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 收敛
      $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx$ 一致收敛.
  - 重要例
    - Dirichlet　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac\pi2$　(收敛因子)
    - Laplace　$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$
      $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac\pi2e^{-\alpha\beta}$.
      (构造得微分方程)
    - Fresnel　$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$
      (收敛因子).
    - $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$
      - 定义域 $(0,+\infty)$，连续.
      - 任意阶导数 $\Gamma^{(k)}=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$
      - 递推 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.
        $\Gamma(n+1)=n!\,\Gamma(1)=n!$
        $\Gamma(n+\frac12)=(n-\frac12)\cdots\frac12\Gamma(\frac12)$
        $=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt\pi$.
      - 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi}$.
      - $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} u^{2s-1}e^{-u^2}\,du$.
      - 倍加公式 $\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt\pi}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac12)$
    - $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$
      - 定义域 $I=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$，
        对称且连续.
      - $B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$
      - $B(p,q)=2\int_0^{\frac\pi2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$
      - $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
        $B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$