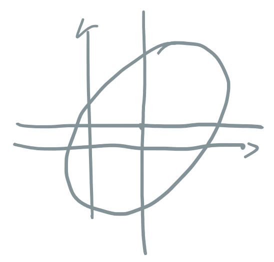
期中

2022年5月9日 星期一　　上午10:00

$5x^2-6xy+5y^2-6x+2y-4=0$

拉格朗日乘数法求椭圆面积

S1  坐标平移，
$\begin{cases} x=u+m \\ y=v+n \end{cases}$

$5(u+m)^2-6(u+m)(v+n)+5(v+n)^2$
$-6(u+m)+2(v+n)-4=0$

中心在圆上 ⇒ 一次项系数为0. (u,v).

$\therefore \begin{cases} 10m-6n-6=0 \\ -6m+10n+2=0 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{3}{4},\ n=\frac{1}{4}.$

平移后 $5u^2-6uv+5v^2-6=0$　$(u,v$ 在圆时为点).

令 $F(u,v)=u^2+v^2+\lambda(5u^2-6uv+5v^2-6)$

$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}=2u+\lambda(10u-6v)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial v}=2v+\lambda(-6u+10v)=0. \end{cases}$

方程有非零解，故 $\begin{cases} (1+5\lambda)u-3\lambda v=0 & ① \\ -3\lambda u+(1+5\lambda)v=0 & ② \end{cases}$

的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1+5\lambda & -3\lambda \\ -3\lambda & 1+5\lambda \end{vmatrix}=0.$

$16\lambda^2+10\lambda+1=0$ ③

①×u + ②×v 得 $u^2+v^2+\lambda(\underbrace{5u^2-6uv+5v^2}_{6})=0$

$\therefore u^2+v^2=-6\lambda.$ $f(x,y$

设方程③的两根为 λ_1,λ_2,

椭圆两轴 a.b. $(ab)^2=36\lambda_1\lambda_2=36\times\frac{1}{16}.$

$\therefore S=\pi ab=\frac{3}{2}\pi.$

S2. 旋转后平移. $\begin{cases} x=\frac{u+v}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{u-v}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$5\left[\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2\right]-6\frac{u+v}{\sqrt{2}}\times\frac{u-v}{\sqrt{2}}-6\cdot\frac{u+v}{\sqrt{2}}+2\frac{u-v}{\sqrt{2}}=0$

交叉项消失的标准方程.

S3. 对称法求曲线.

$C: f(x,y)=0 \Rightarrow C': f(2m-x, 2n-y)=0.$

$5(x^2+y^2)-6xy-6x+2y+4=0$

对称代入与原方程重合. 得中心 (m,n).

$f(x,y)=1+\int_0^x du\int_0^y f(u,v)dv.$

在 $D: x\in[0,1], y\in[0,1]$ 上至多有一个连续 f.

假设方程有两个连续 f. $f_1(x,y)$ $f_2(x,y)$.

令 $g(x,y)=f_1(x,y)-f_2(x,y).$

$=\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,du\,dv$

$=\int_0^x\int_0^y g(u,v)\,du\,dv.$

$|g(x,y)|\le\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|\,du\,dv.$

$\le\int_0^x\int_0^y M\,du\,dv=Mxy.$

当 $(x,y)\in D$ 时，$|g(x,y)|\le M.$

归纳证明 $g(x,y)\le\frac{x^n\cdot y^n}{(n!)^2}M.$

当 $n=1$ 时，$g(x,y)\le Mxy$ 成立.

假设 n 时成立，

则 $|g(x,y)|\le\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|\,du\,dv$

$\le\int_0^x\int_0^y\frac{Mu^nv^n}{(n!)^2}\,du\,dv$

$=\frac{Mx^{n+1}y^{n+1}}{(n!)^2(n+1)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{Mx^{n+1}y^{n+1}}{((n+1)!)^2}=0.$ $\therefore|g(x,y)|\le0.$

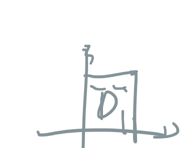
$f(x,y)=1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,du\,dv$

$\Rightarrow f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot y^n}{(n!)^2}$

$1+\int_0^x\int_0^y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^nv^n}{(n!)^2}\,du\,dv$

$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\int_0^y\frac{u^nv^n}{(n!)^2}\,du\,dv$

$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}\cdot y^{n+1}}{((n+1)!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^ny^n}{(n!)^2}$

另证 $g(x,y)=\int_0^x\int_0^y g(u,v)\,du\,dv$ 后. 

对 $\forall a\in(0,1)$.

设 $M(a)=\max|g(x,y)|$, $(x,y)\in[0,a]^2$.

$=|g(x_0,y_0)|$ (端取到)

$g(x_0,y_0)=\int_0^{x_0}\int_0^{y_0}g(u,v)\,du\,dv.$

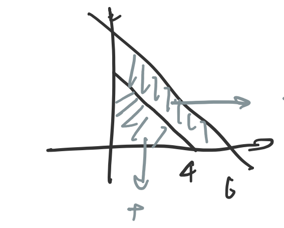
$\therefore M(a)\le\int_0^{x_0}\int_0^{y_0}|g(u,v)|\,du\,dv\le\int_0^{x_0}\int_0^{y_0}M(a)\,du\,dv$

$=M(a)\,x_0y_0\le M(a)a^2.$

$(1-a^2)M(a)\le0$, $a^2\le1$, $\therefore M(a)\le0. \to =0.$

$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$

D　$0\le x+y\le6$
　　$x,y\ge0$



$x+y\le4$ 时，$0\le f(x,y)\le4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot y(4-x-y)$

$\le4\cdot1^4=4$ (最大值)

$4\le x+y\le6$, $0\le-f(x,y)=x^2\cdot y(x+y-4)$

$y\le6-x$, 尽量大，⇒　$\le x^2(6-x)\cdot2=x\cdot x(12-2x)$

$f(x,y)$ 可以越小.　$\le4^3=64.$

$\iint_D y^2\,dx\,dy$. $D: \begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 与 $y=0$ 围成.

S1 $x'(t)=a(1-\cos t)\ge0$,

则 $x(t)$ 关于 t 单调增，故 存反函数 $t=t(x)$.

$\therefore y$ 关于 x 的函数 $y=y(x)=y(t(x))$

$x\in[0,2\pi a]$.

$I=\int_0^{2\pi a}\int_0^{y(x)}y^2\,dy\,dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)\,dy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)]^3a(1-\cos t)\,dt$

$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^4dt=\frac{a^4}{3}16\times2\int_0^{2\pi}s^2\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}$

$=\frac{a^4}{3}\times32\int_0^{\pi}\sin^8m\,dm=\frac{64}{3}a^4\cdot\frac{\pi}{2}\times\frac{7!!}{8!!}=\frac{35}{12}\pi a^4.$

S2 Green 公式.

$\oint_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

$Q=0$, 凑得 $\iint_D y^2\,dx\,dy=\oint_{\partial D}-\frac{1}{3}y^3\,dx$

$y=0$, 不积，只看曲线部分.

$\iint_D y^2\,dx\,dy=-\frac{1}{3}\int_{L_2}y^3\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)]^3a(1-\cos t)\,dt=\ldots$

$F(x,y)=0$, $xy+e^x-xy-1=0$ 在 $(0,0)$ 确定隐函数 $y=\varphi(x)$, 求 $\varphi'(0)$. $\varphi''(0)$.

$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\ln(x^2+y^2) & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$(x,y)\ne(0,0)$ 时，$f(x,y)\le(|x|+|y|)^n|\ln(x^2+y^2)|$
$\le2^{\frac{n}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}|\ln(x^2+y^2)|$

$\lim_{t\to0}t\ln t=0$　连续　$n\ge1.$

$\lim_{t\to0}t^{\alpha}\ln t=0$　可微　$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le2^{\frac{n}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}|\ln(x^2+y^2)|$

$n\ge2$, $\frac{f(x,y)-ax-by}{o(\rho)}=0.$

当 $n=1$ 时，$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\ln x^2=-\infty.$

故 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 不存在，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

$\iiint_V|z|\,dx\,dy\,dz$. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$

$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$　$r^4=r^2a^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$
$r=a\sqrt{-\cos2\theta}$, $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}].$
$r\in[0,a\sqrt{-\cos2\theta}]$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$8\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{a\sqrt{-\cos2\theta}}r^3\,dr$

$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,a^4\cos^22\theta\,d\theta$

$=\frac{\pi a^4}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^22\theta\,d\sin^2\theta=\frac{\pi a^4}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)^2dt=\frac{\pi a^4}{12}.$