期中复习

错题. 试卷. 11.15 16 17 18 19 20
整理. 学习指导. 考.

2021年11月14日 星期日 上午9:58

自然数 — 加乘封闭
↓
整数 — 加减乘封闭
↓
有理数 — 加减乘除封闭. 稠密性，但不连续.
↓
实数 — 封闭且完备

数列收敛 & 实数完备性

① 实数完备性公理.
对 $\forall X\subset \mathbb{R}$, $Y\subset \mathbb{R}$, 对 $\forall x\in X$, $y\in Y$, 且 $x\le y$, 都 $\exists c\in \mathbb{R}$, 使 $x\le c\le y$.

② 确界原理
有上/下界必有上/下确界.

③ 单调有界必收敛.

④ 列紧性定理.
任何有界数列必存在收敛子列.

⑤ 闭区间套定理.
对 $\forall [a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]$, 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$, $b_1>b_2>\cdots>b_n$, 且有 $\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$, 则有 $[a_i,b_i]$ 的交集中仅有唯一一点 ξ.

⑥ Cauchy收敛准则.
对 $\forall\varepsilon$, $\exists N$, 当 $n>N$, 对 $\forall p$, 都有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$, 则 a_n 为基本列 $\Leftrightarrow$ 收敛.

数列 → 函数 → 导数

数列

- 极限
  - ε-N定义.
  - 性质
    - 线性性 (定义证)
    - 唯一性 (反证).
    - 局部保序性
      - 改变有限项
      - $a_n>c$, $a\ge c$.
      - $a>b$, $a_n>b_n$.
    - 四则运算 (定义)
    - 有界 (定义+分段)
    - 夹逼
      - 简单(对0) (定义)
      - 一般(对a) (构造→简单).
    - 柯西.
  - 子列. 与原数列同极限.
  - 计算.
    - 定义.
    - 夹逼.
    - 单调有界.
    - Stolz.

函数

- 极限
  - ε-δ/X 定义. $x\to\infty$
  - 性质
    - 线性性 (定义)
    - 唯一性 (反证)
    - 保序性. (定义)
    - 有界性 (分段定义)
    - 四则运算. (定义)
    - 夹逼 (简单→一般)
    - 复合函数极限 (定义)
    - 海涅数列极限 (定义. 反证+构造)
    - 柯西收敛 (定义. 构造数列).
  - 计算.
    - ① 等价替换
    - ② Taylor
    - ③ L'hospital.
    - ④ 定义.
  - 计算
    - 定义.
    - 单调有界
    - 夹逼.
    - (几个重要极限)
- 连续性
  - 定义: $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. ε-δ.
  - 性质
    - 局部有界性: 连续→邻域有界. (定义).
    - 四则运算.
    - 复合函数连续.
    - 反函数连续.
    - 初等函数连续.
  - 概念: 间断.
- 闭区间连续
  - 定义: 多几个端点 (端点处)
  - 性质
    - 零点定理 (区间套)
    - 介值定理 (构造→零点)
    - 有界性 (反证+构造)
    - 最值性 (反证+构造/确界)
    - 值域闭区间 (综合上面个)
    - 反函数与单调 (反证. 构造)
    - 一致连续性
      - 定义: 比连续更严格.
      - 性质: 闭区间连续→一致连续 (构造子列)
- 参数方程
  - 求导. 公式
  - 曲率 (空间→平面) 公式

$$k(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}=\frac{x'y''-x''y'}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}.$$

导数

- 定义: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- 性质: 可导必连续. (配凑→定义)
- 计算
  - 四则运算 (定义、配凑技巧)
  - 复合 (构造连续函数)
  - 反函数 (定义)
  - 初等函数
- 计算 ↓
  - 高阶导数
    - 乘 → Leibniz定理.
    - 计算归纳
    - 三角 → 周期.
  - 参数方程 (反函数).

微分

- 定义 $f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)+o(\Delta x)$
- 计算
  - $df(x)=f'(x)dx$.
  - 一阶微分形式不变性.
- 定理
  - Fermat定理 极大. $f'(x_0)=0$ (定义)
  - Rolle定理. $f(a)=f(b)$. $f'(x_0)=0$ (最值性)
  - Lagrange 定理. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (构造+Rolle)
  - Cauchy中值 (构造+Lagrange)
  - 连续性 (极限、定义)
  - Darboux定理 (最值. 费马→构造)
  - L'hospital 法则
    - $\frac{0}{0}$ (构造+Cauchy)
    - $\frac{\infty}{\infty}$ (构造).

应用

- 单调性与极值.
  - $f'(x)$ 正负, $f(x)$ 增减.
  - $f'(x)=0$, $f''(x)$ 正负, $f(x)$ 极值.
- 凹凸性与拐点.
  - $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$
  - $f(x)<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_1)+f(x_1)$
  - $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)>f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$
  - $f'(x)\nearrow$. $f(x)>f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
  - $f''(x)>0$.

Taylor展式.

- 公式
  - Peano. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+o((x-x_0)^n)$
  - Lagrange. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$
- 应用
  - 计算极限
  - 证明不等式
  - 利用Maclaurin求其他展式.
  - 若干求展式.