期末复习

2022年1月5日 星期三　　上午8:50

不定积分

- 概念
- 基本计算
  - 线性性
  - 换元积分
  - 分部积分
- 有理式积分
  1. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$
     - $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$：$A\ln|x-\alpha| + C$；$-\frac{A}{r-1}\cdot\frac{1}{u^{r-1}}$
     - $\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$：$\frac{B}{2}\ln|u|$；$-\frac{B}{2}\times\frac{1}{s-1}\times\frac{1}{u^{s-1}}$ $+\int (C-\frac{\beta B}{2})\frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a}+C$
  2. $R(\cos x, \sin x) \to t=\tan\frac{x}{2}$，$x = 2\arctan t$.
  3. $R(x, \sqrt{1-x^2}) \to x = \cos u$. $\sqrt{1-x^2} = \sin x$.
  4. $R(x, \sqrt{x^2-1}) \to x = \cosh u$. $\sqrt{x^2-1} = \sinh u$.
  5. $R(x, \sqrt{x^2+1}) \to x = \sinh u$　$\sqrt{x^2+1} = \cosh u$.
  6. $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \longrightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$. $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$.
  7. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \longrightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x$.

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}) + C.$

$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|) + C.$

$\int R(\cosh x, \sinh x)\,dx$
$t = \tanh\frac{1}{2}x$，$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$，$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$.

$\int \tan x = -\ln|\cos x| + C$

$\int \frac{1}{\cos x} = \ln|\tan x + \sec x| + C.$

$\int \frac{1}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

$\int \frac{1}{\tan x} = \ln|\sin x| + C$

定积分 ——应用之→ 微分方程

- 定义
  - 几何：曲边梯形面积.
  - 代数：分割 T，$\|T\| = \max\{\Delta x_i\}$.
    如果 $\exists I$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $\|T\|<\delta$ 时，$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \varepsilon$，
    则 $f(x)$ 在区间可积.
- 基本性质
  - 区间可加.
  - 线性性.
  - 保序性.
  - 绝对值. $|\int\cdots| \le \int|\cdots|$.
  - 估算　m. M.
  - 积分中值. (Lagrange).
- 基本计算
  - 换元 ⇒ 翻转、平移.
  - 分部
- 变上限积分
  - 定义：区间上连续函数的变上限积分就是它的原函数.
  - 性质
    1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，对 $c\in[a,b]$，有 $\int_c^x f(x)dx \triangleq \varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.
       (可积 ⇒ 有界 ⇒ 原函数)
    2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中某点 x_0 连续，则 $\varphi(x)$ 在 x_0 可导.
       (原函数 + 绝对值)
    3. Newton-Leibniz 公式.
       ⇒ 求导公式 $\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$
       $\varphi'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$.
       (取定积分下限)
- 可积性
  - 基本概念：上下界 m. M.
    振幅 $w_i = M_i - m_i$.
    Darboux 上下和
    $\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$，$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$
  - 定理
    1. T 添加 k 个分割得 T'.
       $\bar{S}(T) \ge \bar{S}(T') \ge \bar{S}(T) - k\omega\|T\|$
       $\underline{S}(T) \le \underline{S}(T') \le \underline{S}(T) + k\omega\|T\|$.
    2. $T_1 \cup T_2 = T$，则 $\underline{S}(T_1) \le \underline{S}(T) \le \bar{S}(T) \le \bar{S}(T_1)$.
    3. $\bar{I} = \inf(\bar{S}(T))$，$\underline{I} = \sup(\underline{S}(T))$
       有 $\lim_{\|T\|\to0}\bar{S}(T) = \bar{I}$，$\lim_{\|T\|\to0}\underline{S}(T) = \underline{I}$.
    4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积
       ⇔ $\lim_{\|T\|\to0}(\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) = \lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i = 0$
       ⇔ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\|T\|$，使 $\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i < \varepsilon$.
       ⇔ $\bar{I} = \underline{I}$ (上下积分相等).
  - 可积性判断
    1. 有界闭区间上的连续函数可积.
       $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.
       对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，
       有 $|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$
       ∴ 当 $\|T\|<\delta$ 时，$w_i < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$.
       ∴ $\exists\|T\|<\delta$，$\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a+1}\Delta x_i$
       $= \frac{\varepsilon}{b-a+1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i < \varepsilon$，可积.
    2. 有界闭区间上单调连续函数可积.
       (控 $\|T\|$. w_i 同时放缩).
    3. $f(x)$. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)g(x)$ 也可.
       ($|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| = \cdots$ 拆分.
       $\le M|g(x_1)-g(x_2)| + M|f(x_1)-f(x_2)|$)
    4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积.
       ($||f(x_1)|-|f(x_2)|| < |f(x_1)-f(x_2)|$.)
    5. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $f(x) \ge c > 0$，
       则 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 可积 (振幅估算).
- 应用：微元法.
  - 弧长
    - $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$：$\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$.
    - $(x, f(x))$：$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$.
    - $r = r(\varphi)$：$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$.
  - 面积
    - $r = r(\varphi)$：$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.
    - $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$
      - $x'(t)$ 不变号，与 x 轴 $\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,dt$
      - $y'(t)$ 不变号，与 y 轴 $\int_\alpha^\beta |x(t)y'(t)|\,dt$.
      - $xy'-yx'$ 不变号，扇形 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |xy'-yx'|\,dx$.
  - 体积
    - $(x, f(x))$ 绕 x 轴：$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$.
    - $(x, f(x))$ 绕 y 轴：$2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$.
      ($dV = f(x)[\pi(x+dx)^2 - \pi x^2]$. $\int_a^b dV$).
  - 侧面积：$\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_a^b 2\pi|y|\,dl$.
- 推广：广义积分.
  - 定义
    1. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)$ 存在，
       则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$.
    2. $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，且在 a 的任意右邻域内无界，如果
       $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 存在，则 $\int_a^b f = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f$.
  - 举例
    1. 第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ $(a>0)$
       收敛 ⇔ $p>1$. (原函数 + 极限)
    2. 第二类 p 积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$.
       收敛 ⇔ $p<1$. (原函数 + 极限)
  - 计算
    1. $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，
       $\int_a^b f$ 存在 ⇔ $F(a+0)$. $F(b-0)$ 存在.
       Newton-Leibniz 公式.
    2. 换元积分 (要求 $\varphi(t)$ 扣. 有限).
    3. 分部积分 (要极限都存在)

微分方程

- 一阶微分方程.
  - 基本：分离变量，分别积分.
  - 齐次 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ 换元 $t = \frac{y}{x}$，$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$.
  - 多项式 $\frac{dy}{dx} = \varphi(ax+by+c)$，换元 $t = ax+by+c$
    $\frac{dt}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$.
  - 一阶线性
    - 齐次 $y' + P(x)y = 0$：
      积分因子 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.
    - 非齐次 $y' + p(x)y = q(x)$：
      公式 $y = e^{-\int p(x)dx}(\int e^{\int p(x)dx}q(x) + C)$
    - ⇒ 贝努利方程.
      同时乘因子 $(1-n)y^{-n}$.
  - 可降阶
    - $F(x, y', y'') \to F(x, p, \frac{dp}{dx})$
    - $F(y, y', y'') \to F(y, p, p\frac{dp}{dy})$.
- 二阶线性微分方程.
  - 齐次：$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$
    ⇒ 基本解组 $y_1(x)$. $y_2(x)$.
    1. $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$，
       $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.
    2. $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$
    3. 通解 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.
  - 非齐次：$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.
    ⇒ 有唯一解 (定初值).
    1. 通解 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \tilde{y}(x)$
    2. 特解 $\tilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ (常数变易).
       $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$
       算法：$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$.
       $y^*(x) = \int \frac{y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x)}{W(s)}f(s)\,ds$.
  - 常系数齐次：$y'' + py' + qy = 0$.
    取特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，$\lambda_0$ 为根
    ⇔ $y = e^{\lambda_0 x}$ 为原方程的解.
    1. 相异实根 λ_1. λ_2 ⇔ $e^{\lambda_1 x}$. $e^{\lambda_2 x}$.
    2. 重根 λ_0 ⇔ $e^{\lambda_0 x}$　$xe^{\lambda_0 x}$.
    3. 共轭复根 $\alpha\pm i\beta$ ⇔ $e^{\alpha x}\cos\beta x$，$e^{\alpha x}\sin\beta x$.
  - 常系数非齐次
    - $f(x)$ 为多项式.
      则方程有形如 $\tilde{y} = x^s(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$ 的特解，其中 s 为 0 作为特征根的重数，a_i 可用待定系数.
    - $f(x)$ 为多项式 $\times e^{\lambda_0 x}$.
      代换 $y = ze^{\lambda_0 x}$，得 $z'' + p_1z' + q_1z = P_n(x)$.
      (其实作平移变换)
    - $f(x) = $ 多项式 $\times e^{\alpha x}\cos\beta x / e^{\alpha x}\sin\beta x / e^{(\alpha+i\beta)x}$.
      则 $e^{\alpha x}\cos\beta x$. $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 分别对应方程 $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ 的实虚部.
      当 $f(x)$ 为多项式 $\times e^{(\alpha+i\beta)x}$，再取.

无穷级数

- 正项级数.
  - 性质
    - 线性性. 保序性.
    - Cauchy 收敛.
    - 级数收敛 ⇒ 通项 → 0.
  - 判别
    - Cauchy 收敛准则.
    - 比较
      - $0 < a_n < b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收 → $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收.
      - $a_n \sim b_n$，$n\to\infty$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
    - D'Alembert：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.
    - Cauchy 根值：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$.
      - $a>1$ 發.
      - $a=1$
      - $a<1$ 收
    - Dirichlet：$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$. $\sum a_n$ 有界. b_n 单调 → 0.
    - Abel：$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，b_n 单调有界.
    - Cauchy 积分：$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同.
- 一般项级数.
  - 判别
    - Cauchy 收敛.
    - Weierstrass 控制.
    - Dirichlet
    - Abel.
    - ⇒ Leibniz. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. $\{a_n\}\to0$
  - 性质
    - 条件收敛
    - 绝对收敛.
- 函数项级数.
  - 定义：函数列 $\{f_n(x)\}$，$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. 收敛点.
  - 一致收敛.
    - 定义
      - 基本定义.
      - 子简介述 $\lim_{n\to\infty}\sup\{f_n(x) - f(x)\} = 0$
    - 判别
      - Cauchy 收敛.
      - 优级数控制收敛.
      - Dirichlet $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)u_n(x)$. $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ 一致有界，$u_n(x)$ 单调趋 0.
      - Abel $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)u_n(x)$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 一致收敛，$u_n(x)$ 单调有界.
    - 性质
      - 连续：$u_n(x)$ 连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，
        则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 连续.
      - 可导：$u_n(x)$ 可导，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，
        $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛，
        则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 可导.
      - 可积：$u_n(x)$ 可积，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，
        $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 可积.
        ($\int_a^b S(x)dx = \int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$.
- 幂级数
  - 定义 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$
  - 性质
    - Abel 引理. (x_0 收敛，$(-x_0, x_0)$ 收敛).
      ⇓
      收敛半径 & 收敛区域.
      $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} / \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$.
    - 连续. 可导. 可积 (一致).
  - Taylor 级数.
    理解成 Taylor 展开形成的级数.
    充要条件是余项趋于 0.
    充分条件是 $f^{(n)}(x)$ 有界.
    重要例. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
    $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$
    $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$.
    $(x+1)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$
    $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^n$
    $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$.