多元函数的talor展开与极值

2022年1月31日 星期一 上午7:11

一、回顾

微分：$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$.

微分中值：$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $\theta\in(0,1)$.

Taylor 展开：$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n$

$R_n=o((x-x_0)^n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $\theta\in(0,1)$.

二、多变量微分中值公式

1. 定义
凸域：连接D中任意两点的直线包含在D中.

2. 定理

① 推导：设 $(x,y)\in D$, $(x+\Delta x,y+\Delta y)\in D$.
直线方程 $L(x+t\Delta x,y+t\Delta y)$, $0\le t\le 1$. （点、参数、方向向量）
若 $f(x,y)$ 在 D 上有连续偏导，
记 $\varphi(t)=f(x+t\Delta x,y+t\Delta y)$,
$\varphi(0)=f(x,y)$, $\varphi(1)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)$.
$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)(1-0)$
即 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\varphi'(\theta)$
$=f'_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta x+f'_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta y$.

② f 在凸域内有连续偏导，对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$,
$f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)=f'_x(\xi,\eta)(x_2-x_1)+f'_y(\xi,\eta)(y_1-y_2)$ （直线上的点）

③ 推论：由定理内容，在定理条件下，若有 $f'_x=f'_y=0$，则 $f(x,y)\equiv 0$.
实际上对D中任何能用光滑曲线连接的两点，$f'_x=f'_y\equiv 0$, $f(x,y)=C$. （折线段连通）
光滑：注意一点可导.
令 $\varphi(t)=f(x(t),y(t))$, $\alpha\le t\le\beta$,
$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)$
$\varphi'(\xi)(\beta-\alpha)=f'_x(x(\xi),y(\xi))x'(\xi)+f'_y\cdots$
$f'_x=f'_y\equiv 0$, $\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=0$.

④ 推广：对 n 元函数 $f(x_1,\dots,x_n)$.
直线 $(x_1+th_1,\dots,x_n+th_n)$, $t\in[0,1]$.
$f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,\dots,x_n)$
$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+\theta h_1,\dots,x_n+\theta h_n)h_i$.

⑤ 对向量值函数微分中值不成立.
反例：$\vec r(t)=(\cos t,\sin t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j$.
假设 $\exists\theta\in[0,\pi]$,
使 $\vec r(\pi)-\vec r(0)=\vec r'(\theta)(\pi-0)$,
得 $\sin\theta=\frac{2}{\pi}$, $\cos\theta=0$. 矛盾.

定理：设 $\vec r=\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j$, $[a,b]\in R^2$,
在 $[a,b]$ 上连续可导，则有
$|\vec r(b)-\vec r(a)|\le|\vec r'(\theta)|(b-a)$.

证明：令 $\varphi(t)=(\vec r(b)-\vec r(a))\cdot\vec r(t)$
$\varphi(b)-\varphi(a)=(\vec r(b)-\vec r(a))\cdot(\vec r(b)-\vec r(a))$
$\exists\theta\in[a,b]$, $\varphi'(\theta)(b-a)=(\vec r(b)-\vec r(a))\vec r'(\theta)(b-a)$
∴有 $|\vec r(b)-\vec r(a)|^2=|(\vec r(b)-\vec r(a))\cdot\vec r'(\theta)|(b-a)$
$\le|\vec r(b)-\vec r(a)||\vec r'(\theta)|(b-a)$
∴ $|\vec r(b)-\vec r(a)|\le|\vec r'(\theta)|(b-a)$.
可推广到 n 维.

三、多变量的Taylor展开

1. 设 $f(x,y)$ 在 D 上有 n 阶偏导数，则对 $\forall(x_0,y_0)\in D$，在 (x_0,y_0) 的邻域内有
$f(x,y)=f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}D^mf(x_0,y_0)+R_n$.
其中 $D=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k$, $D^mf=D(D^{m-1}f)$.
令 $\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$, $0\le t\le 1$
$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}t^i+R_n$.
$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th,y_0+tk)k$.
$\varphi'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$.
$\varphi''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$
$=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f$.
$\varphi^{(i)}(t)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^if$, $\varphi^{(i)}(0)=D^if(x,y)$.

2. $f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+R_1$.
$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}k+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+R_2$.
$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$.
$=f(x_0,y_0)+(h,k)\cdot\mathrm{grad}f+(h,k)\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$

3. 推广到多元 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.
$D=h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}$.
$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+(h_1,\dots,h_n)\,\mathrm{grad}f$
$=(h_1,\dots,h_n)\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^i\partial x^j}\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$

四、极值

1. 定义：$f(x,y)$ 在 D 上有定义，若在 (x_0,y_0) 邻域内有 $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$，为极小值.

2. 定理：若 f 可导，(x_0,y_0) 是极值点，则有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$. 反之不然（马鞍面）.
⇒ 驻点 $f'_x(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$.

例：设 $f(x,y)$ 在 R^2 可微，且 $\lim_{\rho\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\rho}\ne 0$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.
试证：对 $\forall\vec v=(v_1,v_2)$，存在 (x_0,y_0) 使 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=v_1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=v_2$，
即 $\mathrm{grad}f=\vec v$.
证明：类比：$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$，对 $\forall a$，$\exists f'(x_0)=a$. $g(x)=f(x)-ax$.
$\frac{g(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}-a\to+\infty$. 驻点在内部.
令 $F(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y$
$\frac{F(x,y)}{\rho}=\frac{f(x,y)}{\rho}-\frac{v_1x+v_2y}{\rho}\to+\infty$.
$\frac{F(x,y)}{\rho}$ 在内部取到最小值，则 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

例. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续并有偏导. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$
且 $f(x,y)|_{\partial D}=0$，则 $f(x,y)|_D\equiv 0$.
证明：假设 $f(x_0,y_0)\ne 0$，由题得 $(x_0,y_0)\in D^\circ$.
不妨设 $f(x_0,y_0)>0$，则存在 $(x',y')\in D^\circ$，为 $f(x,y)$ 的最大值，
∴ $\frac{\partial f}{\partial x}(x',y')=\frac{\partial f}{\partial y}(x',y')=0$.
∴ $f(x',y')=\frac{\partial f}{\partial x}(x',y')+\frac{\partial f}{\partial y}(x',y')=0$.
最大值 $=0$，∴ $f(x,y)|_D\equiv 0$.

例. $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$. 直线 $y=ax+b$，
计算 $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$.
$\frac{\partial f}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)x_i=0$
$\frac{\partial f}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)=0$.
∴ $\begin{cases}(\sum x_i)^2a+\sum x_ib=\sum x_iy_i\\(\sum x_i)a+nb=\sum y_i\end{cases}$
$\begin{vmatrix}\sum x_i^2&\sum x_i\\\sum x_i&n\end{vmatrix}=n\sum x_i^2-\sum x_i^2\ne 0$.
其中 $\sum x_i^2=(\sum 1\cdot x_i)^2<n\sum x_i^2=(\sum 1^2)(\sum x_i^2)$.
可解得 (a_0,b_0) 使 $\frac{\partial f}{\partial a}(a_0,b_0)=\frac{\partial f}{\partial b}(a_0,b_0)=0$.
又 $\lim_{\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty}f(a,b)=+\infty$，∴ (a_0,b_0) 为最小值，在内点.

3. 从驻点到极值点.
二阶导 $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$
$+\frac{1}{2}(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2)+o(\rho^2)$
∴ $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(h,k)\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(\rho^2)$
记二次型 $Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$.
$Q>0$，$A\lambda^2+2B\lambda+C>0$ 或 $A+2B\lambda+C\lambda^2>0$.
$Q(h,k)$ 不定 ⟺ $\Delta=AC-B^2<0$. 非极值.
$Q(h,k)$ 半定 ⟺ $\Delta=0$
$Q(h,k)$ 是定的 ⟺ $\Delta=AC-B^2>0$.
$A>0$，正定. $A<0$，负定.
⇒ (x_0,y_0) 为极值点.
正，极小. 负，极大.
证明：对 $(h,k)\ne 0$，引进 u,v，
$u=\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h}{\rho}$, $v=\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{k}{\rho}$. $u^2+v^2=1$.
$Q(h,k)=\rho^2(Au^2+2Buv+Cv^2)=\rho^2\varphi(u,v)$
若 $Q>0$，则 $\varphi(u,v)>0$，
∴ $\varphi(u,v)|_{u^2+v^2=1}$ 的最小值 $m>0$.
∴ $Q(h,k)\ge\rho^2m$.
$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}Q(h,k)+o(\rho^2)$
$\ge\frac{1}{2}\rho^2m+o(\rho^2)$
$=\rho^2(\frac{1}{2}m+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2})>0$.

例. $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$x+y\le\pi$.
求 $f(x,y)$ 在 D 上的极值.
$f'_x=\cos x\sin y\sin(x+y)+\sin y\sin x\cos(x+y)$
$=\sin y(\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y))$
$=\sin y\sin(2x+y)$
$f'_y=\sin x\sin(2y+x)$.
极值，$\begin{cases}\sin y\sin(2x+y)=0\\\sin x\sin(2y+x)=0\end{cases}$
内部，$0<2x+y<2\pi$，$0<x+2y<2\pi$
则 $2x+y=\pi$，$2y+x=\pi$.
$x=y=\frac{\pi}{3}$，极大值.
边界. 极小值.

例. 求由方程 $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 极值.
对 x，$4x+2zz'_x+2y-2-4z'_x=0$.
$z'_x=\frac{4x+2y-2}{4-2z}$
对 y，$2y+2zz'_y+2x-2-4z'_y=0$.
$z'_y=\frac{2y+2x-2}{2-2z}$
$z'_x=0$, $z'_y=0$ ⇒ $(x,y)=(0,1)$.
代入得 $z(x_0,y_0)=z$，满足 $z^2-4z+3=0$.
∴驻点 $M_1=(0,1,1)$. $M_2=(0,1,3)$.
检验是否为极值点：
$z''_{xx}=\left(\frac{4x+2y-2}{4-2z}\right)'_x=\dots$, $z''_{xy}=\dots$, $z''_{yy}=\dots$

五、条件极值

1. 例. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内接长方形的最大面积.
⇒ 求 $f(x,y)=4xy$，当 x, y 满足 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 时的最大值.
$\varphi(x,y)=0$，$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.
∴ $f(x,y)=4bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

2. 求 $f(x,y)$ 当 (x,y) 满足 $\varphi(x,y)=0$ 时的条件极值.
假如 $\varphi(x,y)$ 存在隐函数.
不妨设 $y=y(x)$，则 $\varphi(x,y(x))=0$，
$y'(x)=-\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}$
代入 $z=f(x,y(x))$
有 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'(x)$
$=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}=0$，
∴ $\frac{\partial f/\partial x}{\partial\varphi/\partial x}=\frac{\partial f/\partial y}{\partial\varphi/\partial y}\triangleq-\lambda$.
$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$.
∴ $\mathrm{grad}f+\lambda\,\mathrm{grad}\varphi=0$.
要求极值 ⇒ 驻点.
驻点 (a,b) 满足 $\begin{cases}\mathrm{grad}f(a,b)+\lambda\,\mathrm{grad}\varphi(a,b)=0\\\varphi(a,b)=0\end{cases}$
∴ $\begin{cases}f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0\\f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 方程组的解. （不需要隐函数）

3. 例. $\varphi(x,y)=0$ 是光滑曲线，求曲线上的点到原点的最短距离.
$f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 的极值.
$\begin{cases}2x+\lambda\varphi'_x=0\\2y+\lambda\varphi'_y=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$

例. 将给定正数 a 分成 n 个正数 $x_1\dots x_n$ 的和并使这些正数的乘积最大.
求 $f(x_1,\dots,x_n)=\prod x_i$ 在 $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i-a$ 条件下的极值.
$\begin{cases}x_2\cdots x_n+\lambda=0\\\vdots\\x_1\cdots x_{n-1}+\lambda=0\\x_1+\dots+x_n-a=0\end{cases}$ 驻点 $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$
又 $0<f(x_1,\dots,x_n)=x_1\cdots x_n\le a^n$
$f(x_1,\dots,x_n)|_{\partial D}=0$. （边界值）
∴ $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$ 是最大值点.
∴ $x_1\cdots x_n\le\frac{(x_1+\dots+x_n)^n}{n^n}$，
$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$，$f(x_1,\dots,x_n)\le\frac{a^n}{n^n}$.

1. 二元函数 Taylor

① $\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$
$\varphi'(t)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th,y_0+tk)$
$=Df(x_0+th,y_0+tk)$
算子 $D=h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$
$\varphi''(t)=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th,y_0+tk)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th,y_0+tk)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+th,y_0+tk)$
$=D^2f(x_0+th,y_0+tk)$
$D^m=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}h^ik^j\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^j}$
$\varphi^{(m)}(t)=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}h^ik^j\frac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^j}(x_0+th,y_0+tk)$
一元taylor $\varphi(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}$
二元taylor $f(x,y)=f(x_0+h,y_0+k)$
$=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}D^mf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

② 若存在一个 $M>0$，使当 $(x,y)\in G$ 时，
$\left|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^i\partial y^j}(x,y)\right|\le M$，
∴ 对 $\forall i,j$，$|R_n|\le\sum_{i+j=n+1}\frac{(n+1)!}{i!j!}|h|^i|k|^jM=M(|h|+|k|)^{n+1}$.
∴ $R_n=O(\rho^{n+1})=o(\rho^n)$ 成立.

③ 对二阶展开式.
$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+R_2$.

例. $f(x,y)=e^x\cos y$ 在 $(0,0)$ 展开二阶.
$f(x,y)=[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)][1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)]$ 可分离变量.
$=1+x+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+R_2$, $R_2=o(\rho^2)$.
或者计算.
又：$f(x,y)=\cos(x+y)$
$\to f(x,y)=1-\frac{(x+y)^2}{2}+o(\rho^2)$.

2. 多元函数的Taylor

$\varphi(t)=f(x_1+th_1,x_2+th_2,\dots,x_n+th_n)$.
对函数而非向量成立.
映射 $\vec r:[0,2\pi]\to R^2$. $\vec r(t)=(\cos t,\sin t)$.
设 $\exists\theta\in(0,2\pi)$ 使 $\vec r(2\pi)-\vec r(0)=\vec r'(\theta)2\pi$.
$D=h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}$
$D^m=\sum_{i_1+\dots+i_n=m}\frac{m!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n}\frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}$
n项式定理.

3. 二元函数极值

① 极值点，且有偏导
⇒ $(x_0,y_0)\in D^\circ$，$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$
$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$ ⇒ 驻点.

② $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2)$
令 $Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$.
Q 恒正 → 正定. ≥ 0 → 半正定
恒负 → 负定 ≤ 0 → 半负定.
记 $\Delta=AC-B^2$（行列式）
Q 定 ⟺ $AC-B^2>0$ 正定. $A>0$. $C>0$ $\begin{pmatrix}1&\\&\ddots\\&&1\end{pmatrix}$
负定 $A<0$. $C<0$. $\begin{pmatrix}-1&\\&\ddots\\&&-1\end{pmatrix}$
半定 ⟺ $AC-B^2=0$. $\begin{pmatrix}1&\\&0\\&&\ddots\\&&&1\end{pmatrix}$（存在0）
不定 ⟺ $AC-B^2<0$. $\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$
仅适用于二阶行列式.
Q 正定，$Q(1,0)=A>0$ $Q(0,1)=C>0$.
取 $k=1$，$Q(h,k)=\frac{1}{A}[A^2h^2+2ABhk+B^2k^2+(AC-B^2)k^2]$
$=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2+\Delta]$.
$Ah+Bk=0$，$\frac{1}{A}>0$. $\Delta>0$
$\Delta>0$，A、$C>0$，$(h,k)\ne(0,0)$
如果 $k\ne 0$，$Q(h,k)=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2+\Delta k^2]>0$
如果 $h\ne 0$，$Q(h,k)=\frac{1}{C}[(Bh+Ck)^2+\Delta h^2]>0$

③ $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2)$
$\Delta>0$，极值.
$\Delta<0$，不是极值.
$\Delta=0$，无法判断.
证明：令 $u=\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h}{\rho}$，$v=\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{k}{\rho}$.
$u^2+v^2=1$，$Q=\rho^2\varphi(u,v)$，
$\varphi(u,v)=(Au^2+2Buv+Cv^2)$ 连续函数.
Q 正定，φ 的最小值 $m>0$.
∴ $Q\ge m\rho^2$.
又 $\frac{R_2}{\rho^2}=o(1)$，$(\rho\to 0)$
∴ 当 $0<\rho<\delta$ 时有 $\frac{R_2}{\rho^2}>-\frac{m}{2}$.
$f(x,y)-f(x_0,y_0)>\frac{m}{2}\rho^2-\frac{m}{2}\rho^2=0$.
若 Q 不定，则存在 (h_1,k_1)，(h_2,k_2)，
$Q(h_1,k_1)>0$，$Q(h_2,k_2)<0$
$f(x_0+th_1,y_0+tk_1)-f(x_0,y_0)$
$=\frac{t^2}{2}Q(h_1,k_1)+R_2=\frac{t^2}{2}(Q(h_1,k_1)+\frac{2R_2}{t^2})$
$\lim_{t\to 0}\frac{2R_2}{t^2}=0$. $(R_2=o(\rho^2)=o(t^2)$，$\rho=\sqrt{h_1^2+k_1^2}\,t)$
$\lim_{t\to 0}(Q(h_1,k_1)+\frac{2R_2}{t^2})>0$.
$f(x_0+th_1,y_0+tk_1)-f(x_0,y_0)>0$（邻域内）
同理，$f(x_0+th_2,y_0+tk_2)-f(x_0,y_0)<0$.

例. 求函数 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在闭域 $x\ge 0$，$y\ge 0$，$x+y\le\pi$ 上的最大小值.
边界 $z=0$. 取最小值（z 恒 ≥ 0）.
有界闭域内必有最大/小值.
求驻点 $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y[\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y)]$
$=\sin y\sin(2x+y)=0$ $x>0$, $y>0$
$\frac{\partial z}{\partial y}=\sin x\sin(2y+x)=0$. $x+y<\pi$.
∴ $\sin y=0$ 或 $\sin(2x+y)=0$. ⇒ $2x+y=\pi/2$
$\sin x=0$ 或 $\sin(2y+x)=0$. ⇒ $2y+x=\pi/2$
$0<2x+y$，$2y+x<2\pi$ ⇒ $2x+y=2y+x=\pi$.
∴ $x=y=\frac{\pi}{3}$. $z(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt3}{8}$ 最大值.

例. A.B.C 在平面上不共线. 且 △ABC 有一个内角 $>\frac{2}{3}\pi$. 对平面上 $\forall P$，有函数
$f(P)=|PA|+|PB|+|PC|$
(1) 证明：f 可以在平面上取到最小值.
(2) 求出 f 不可微点的梯度.
(3) 证明函数 f 无驻点，并求最小值.
[内角都 $<\frac{2}{3}\pi$，费马点存在且唯一].
不妨设 $\angle BAC>\frac{2}{3}\pi$.
(1) $f(A)=|AB|+|AC|$.
当 $|PA|>|AB|+|AC|$ 时，$f(P)>f(A)$.
表示 P 在这个圆外.
∴ 当 P 在有界闭集 $|PA|\le|AB|+|AC|$ 上时，有最小值 $f(P)=f(A)$.
此最小值也是平面上的最小值.
(2) $f(P)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{\cdots}+\sqrt{\cdots}$
$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x-x_1}{\sqrt{\cdots}}+\frac{x-x_2}{\sqrt{\cdots}}+\frac{x-x_3}{\sqrt{\cdots}}=\frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|}+\cdots$
∴ $\mathrm{grad}f=-\left(\frac{\vec{PA}}{|PA|}+\frac{\vec{PB}}{|PB|}+\frac{\vec{PC}}{|PC|}\right)$. $P\ne A,B,C$.
(3) 假设 f 有驻点 $P(P\ne A,B,C)$
则 $-\mathrm{grad}f=\frac{\vec{PA}}{|PA|}+\frac{\vec{PB}}{|PB|}+\frac{\vec{PC}}{|PC|}=\vec 0$
三个单位向量和为零，$\vec{PA}$、$\vec{PB}$、$\vec{PC}$ 夹角 $\frac{2}{3}\pi$.
几何知识：P 在 △ABC 内.
则 △ABC 的内角 $<\frac{2}{3}\pi$.
与条件矛盾，驻点不存在.
最小值点：不可微点/（可微）驻点.
∴ $f(P)$ 的最小值 $=\min\{f(A),f(B),f(C)\}$.
$f(A)=|AB|+|AC|$
$f(B)=|AB|+|BC|$ $\angle BAC>\frac{2}{3}\pi$，$|BC|$ 最大.
$f(C)=|AC|+|BC|$. ∴ $f(A)$ 最小.

参考 T14-15

4. 条件极值

例. $x+y+z=0$ 条件下，$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z$ 的取值范围.
① 令 $g(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$.
不妨设 $x,y\in[0,2\pi]$. 周期性.
又 $g(2\pi-x,2\pi-y)=-g(x,y)$.
∴ 存在中心反对称，只需求一半的范围.
② $x=0$，$z=-(x+y)=-y$，$g(x,y)=0$. $y=0$ 同.
$x+y=2\pi$，$\sin x=-\sin y$，$g(x,y)=0$.
即边界上都有同一个值，为最小值.
③ $\frac{\partial g}{\partial x}=\cos x-\cos(x+y)=0$
$\frac{\partial g}{\partial y}=\cos y-\cos(x+y)=0$.
⇒ $\cos x=\cos(x+y)=\cos y$，$0<x$，$<2\pi$. $0<2x+y<4\pi$.
∴ $x+x+y=y+x+y=2\pi$，∴ $x=\frac{2\pi}{3}$，$y=\frac{2\pi}{3}$.
∴ $g(x,y)$ 在 D_1 上的范围 $[0,\frac{3\sqrt3}{2}]$.
④ ∴ $f(x,y)$ 在 D 上的范围 $[-\frac{3\sqrt3}{2},\frac{3\sqrt3}{2}]$.

① 定义. 曲线 L：$\varphi(x,y)=0$（条件），$f(x,y)$（目标）在 L 上的极大值点 $M(x_0,y_0)$：$\varphi(x_0,y_0)=0$，M_0 邻域中，只有 $\varphi(x,y)=0$，都有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

② 条件. $\varphi(x,y)=0$，满足 $\mathrm{grad}\varphi\ne 0$. （若 φ 非封闭，则端点 (c,d) 不为驻点）
(a,b) 是条件极值点，$\varphi(a,b)=0$，
不妨设 $\varphi'_y(a,b)\ne 0$，则存在隐函数 $y=y(x)$，
$z=f(x,y)=f(x,y(x))$，且 a 是驻点.
$z'_a=f'_x(a,b)+f'_y(a,b)y'(a)$
$=f'_x(a,b)-f'_y(a,b)\frac{\varphi'_x(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}$
记 $\lambda=-\frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}$，
则有 $\begin{cases}f'_x(a,b)+\lambda\varphi'_x(a,b)=0\\f'_y(a,b)+\lambda\varphi'_y(a,b)=0\end{cases}$

③ Legrange 乘数法.
条件 $\varphi(x,y)=0$，目标 $f(x,y)=z$.
辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.
$\frac{\partial F}{\partial x}=0$ $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ $\frac{\partial F}{\partial\lambda}=\varphi(x,y)=0$ 驻点方程.

例. 试将正数 a 分成 n 个数的和，使乘积最大
① $a_1+\dots+a_n=a$，$\varphi(a_1,\dots,a_n)=a_1+a_2+\dots+a_n-a=0$.
$f(a_1,\dots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n$.
$F(a_1,\dots,a_n)=a_1a_2\cdots a_n+\lambda(a_1+\dots+a_n-a)$.
则 $\begin{cases}a_2\cdots a_n+\lambda=0\\a_1a_3\cdots a_n+\lambda=0\\\vdots\\a_2\cdots a_n+\lambda=0\\a_1+a_2+\dots+a_n-a=0\end{cases}$ 则 $a_1=a_2=\dots=a_n=\frac{a}{n}$.
$a_1a_2\cdots a_n=-\lambda a_1=-\lambda a_2=\cdots$
② 最大值的存在性.
$G=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_1,\dots,x_n\ge 0,\ x_1+\dots+x_n=a\}$.
G 为有界闭集，f 有最大值、最小值.
$S=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_1,\dots,x_n>0,\ x_1+\dots+x_n=a\}$.
当 $x_1,\dots,x_n$ 中存在0时，f 在 G 上有最小值0.
∴ f 在 S 中的驻点有最大值.

例. 求在约束条件 $(x-1)^2+y^2-1=0$ 下 $z=xy$ 的极值.
① 最值存在性.
$S=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2=1^2\}$，有界闭集.
∴ z 在 S 上必有最大小值.
② $F(x,y)=xy+\lambda[(x-1)^2+y^2-1]$
$\begin{cases}y+\lambda\cdot 2(x-1)=0\\x+\lambda\cdot 2y=0\\(x-1)^2+y^2-1=0\end{cases}$ $\lambda=0$ 时，$(x,y)=(0,0)$. 满足在 S 内.
$\lambda\ne 0$，$x=-2\lambda y$，$y+2\lambda(-2\lambda y-1)=0$.
$(1-4\lambda^2)y=2\lambda$，$y=\frac{2\lambda}{1-4\lambda^2}$，$x=\frac{-4\lambda^2}{1-4\lambda^2}$.
则 $\lambda=\pm\frac{\sqrt3}{2}$.
$\lambda=\frac{\sqrt3}{2}$，$(x,y)=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt3}{2})$
$\lambda=-\frac{\sqrt3}{2}$，$(x,y)=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt3}{2})$