空间曲线

2022年1月30日 星期日 下午3:01

一、引入 曲线 $y=f(x)$. $\vec r(x)=x\vec i+f(x)\vec j$.

曲面 $z=f(x,y)$. $\vec r(x,y)=x\vec i+y\vec j+f(x,y)\vec k$.

$\{(x(t),y(t),z(t)),\ t\in[\alpha,\beta]\}\subset R^3$.

$\{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\mid(u,v)\in D\}\subset R^3$.

二、参数曲线. $\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$.

1. 切线 $\vec r'(t)=x'(t)\vec i+y'(t)\vec j+z'(t)\vec k$.
2. 切线方程: 过 (x_0,y_0,z_0), 以 $\vec r'$ 为方向.

形式 $\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{m_3}$

$\therefore \frac{x-x(t_0)}{x'_{t_0}}=\frac{y-y(t_0)}{y'_{t_0}}=\frac{z-z(t_0)}{z'_{t_0}}$.

3. 法平面方程: 过 (x_0,y_0,z_0), 以 $\vec r'(t_0)$ 为方向.

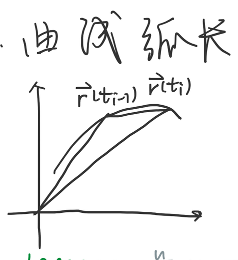
$\therefore (X-x(t_0))x'(t_0)+(Y-y(t_0))y'(t_0)+(Z-z(t_0))z'(t_0)$

例. 求 $\vec r(t)=a\cos t\,\vec i+a\sin t\,\vec j+bt\,\vec k$ 的切线与 z 轴夹角.

$\vec r'(t)=-a\sin t\,\vec i+a\cos t\,\vec j+b\vec k$.

夹角 ⇒ 点乘. $\frac{\vec r'(t)\cdot\vec k}{|\vec r'(t)|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4. 曲线弧长.



$l=\sum_{i=1}^n|\vec r(t_i)-\vec r(t_{i-1})|$

$=\sum_{i=1}^n\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(\ \ )^2+(\ \ )^2}$

lagrange $=\sum_{i=1}^n\sqrt{(x'(\xi_i)\Delta t_i)^2+(y'(\eta_i)\Delta t_i)^2+(z'(\zeta_i)\Delta t_i)^2}$ 更好理解

设 $f(\xi,\eta,\zeta)=\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)+z'^2(\zeta)}$

连续, $\xi,\eta,\zeta\in[\alpha,\beta]$, f 一致连续.

则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 当 $|T|<\delta$ 时,

有 $|f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)-f(t_i,t_i,t_i)|<\varepsilon$. 找同一个值

$\therefore\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta t-f(t_i,t_i,t_i)\Delta t_i\right|$ 可以用Riemann和

$<\varepsilon\sum_{i=1}^n|\Delta t_i|<\varepsilon(\beta-\alpha)$

$\therefore\sum_{i=1}^n f(t_i,t_i,t_i)\Delta t_i=\sum_{i=1}^n\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)+z'^2(t_i)}\,\Delta t$

$\therefore$ 当 $|T|\to0$ 时, $\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|\,dt$.

5. 弧长参数.

$s(t)=\int_\alpha^t|\vec r'(\tau)|d\tau$, $\alpha\le t\le\beta$.

曲线在 $[\alpha,t]$ 上的参数.

$s'(t)=|\vec r'(t)|>0$, 严格单增.

则 $s(t)$ 有反函数 $t=t(s)$.

$\therefore\vec r=\vec r(s)=\vec r(t(s))$, s 是弧长(向量).

(自然方程).

又 $\vec r'(t)dt=\vec r'(s)ds$,

$\vec r'(s)=\frac{d\vec r}{ds}=\frac{d\vec r}{dt}\frac{dt}{ds}=\vec r'(t)\times\frac{1}{s'(t)}=\vec r'(t)\times\frac{1}{|\vec r'(t)|}=1$.

$|\vec r'(s)|=1$, 单位向量.

$(\frac{dx}{ds})^2+(\frac{dy}{ds})^2+(\frac{dz}{ds})^2=1$

$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$.

6. 曲率.

$\vec r=\vec r(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

$\vec r=\vec r(s)$, $0\le s\le L$.

① $|\vec r'(s)|=1$, $\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}=1$, $\therefore(\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r})'=0$, $\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r}=0$. $\dot{\vec r}\perp\ddot{\vec r}$.

记 $\vec K=\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}$, $K=|\dot{\vec r}||\ddot{\vec r}|\sin\theta=|\ddot{\vec r}|$.

② 又 $\lim\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\approx\lim\frac{|\Delta\dot{\vec r}|}{\Delta s}=\lim\left|\frac{\Delta\dot{\vec r}}{\Delta s}\right|=|\ddot{\vec r}|=K$,

几何意义为弯曲程度.

③ 一般 $\vec r=\vec r(t)$, $\vec K=\frac{\vec r'(t)\times\vec r''(t)}{|\vec r'(t)|^3}$.

④ $\vec r(s)=x(s)\vec i+y(s)\vec j$ 方向.

例. $\vec r(t)=\vec r_0+t\vec v$. (直线方程).

$\vec r'(t)=\vec v$, $\vec r''(t)=0$. $\therefore K(t)=0$.

例. $\vec r(t)=a\cos t\,\vec i+a\sin t\,\vec j+bt\,\vec k$

$\vec r'(t)=-a\sin t\,\vec i+a\cos t\,\vec j+b\vec k$

$\vec r''(t)=-a\cos t\,\vec i-a\sin t\,\vec j$. $K=\frac{a}{a^2+b^2}$.

例. 平面曲线 $\vec r(x)=x\vec i+f(x)\vec j+0\vec k$.

$\vec r'(x)=\vec i+f'(x)\vec j$. $\vec r''(x)=f''(x)\vec j$.

$\vec K=\frac{\vec r'\times\vec r''}{r'^3}=\frac{f''(x)\,\vec i\times\vec j}{(1+f'(x)^2)^{\frac32}}=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac32}}\vec k$

三、参数曲面.

$\vec r=\vec r(u,v)=x(u,v)\vec i+y(u,v)\vec j+z(u,v)\vec k$.

$\vec r'_u(u,v)\times\vec r'_v(u,v)$, 切平面方程.

法向量 $\vec n=\frac{\vec r_u\times\vec r_v}{|\vec r_u\times\vec r_v|}$, $\vec r_u\times\vec r_v\ne0$.

四、隐式曲线/面.

1. 平面隐式曲线

设 $F(x,y)\in C'(D)$, $\mathrm{grad}F=F'_x\vec i+F'_y\vec j\ne0$.

方程 $F(x,y)=0$ 给出 $y=f(x)$ / $x=g(y)$.

不妨设 $F'_y\ne0$, 则 $f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

切线方程 $Y-y=f'(x)(X-x)$ (切于 (x,y)).

$F'_y(Y-y)+F'_x(X-x)=0$, 给出平面与法向量 (梯度).

$f''(x)=-\left(\frac{F'_x}{F'_y}\right)'=\frac{F''_yF'_x-F''_xF'_y}{F'^2_y}$

$=\frac{\frac{dF'_y(x,f(x))}{dx}F'_x-\frac{dF'_x(x,f(x))}{dx}F'_y}{F'^2_y}=\cdots$

$K=\frac{F'^2_yF''_{xx}-2F'_xF'_yF''_{xy}+F'^2_xF''_{yy}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{\frac32}}$.

考虑 $F(x,y)=C$, 只需令 $\tilde F(x,y)=F(x,y)-C=0$.

2. 空间隐式曲面.

设 $F(x,y,z)\in C'(V)$

$\mathrm{grad}F\ne0$, $F(x,y,z)=0$ 构成曲面 P.

P 上曲线 $\vec r=\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$,

则有 $F(x(t),y(t),z(t))=0$.

$F'_xx'(t)+F'_yy'(t)+F'_zz'(t)=0$.

即有 $\vec r'(t)\cdot\mathrm{grad}F=0$.

梯度与切向量垂直, 为法向量.

3. 空间隐式曲线.

方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ ⇒ 得为一条相交曲线.

曲线同时在二平面上, 与两个法向量垂直.

∴法向量 $\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G$ ⇒ 切向量.

例. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4a^2=0\\x^2+y^2-2ax=0.\end{cases}$

$\mathrm{grad}F=2x\vec i+2y\vec j+2z\vec k$

$\mathrm{grad}G=(2x-2a)\vec i+2y\vec j$

$\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G=4xy+4(xy-ay)+4z(x-a)+4zy$

参数曲线.

1. $\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $\alpha\le t\le\beta$.

光滑曲线 $\vec r'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$.

正则曲线 $\vec r'(t)\ne0$.

对应一点 $M(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$.

2. 切线方程: $\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

法平面: $x'(t_0)(X-x(t_0))+y'(t_0)\cdots+z'(t_0)\cdots=0$

3. 求弧长: 作分割. $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$.

$M_k=\vec r(t_k)=(x(t_k),y(t_k),z(t_k))$

各折线段. $l(T)=\sum_{i=1}^n|\vec r(t_i)-\vec r(t_{i-1})|$

微分中值. $=\sum_{i=1}^n\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2}$

$=\sum_{i=1}^n\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)+z'^2(\zeta_i)}\,\Delta t_i$

关于 $\sum_{i=1}^n\sqrt{x'(t_i)^2+y'(t_i)^2+z'(t_i)^2}\,\Delta t_i$

$\to\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$.

三元函数 $f(\xi,\eta,\zeta)=\sqrt{x'(\xi)^2+y'(\eta)^2+z'(\zeta)^2}$ 在 $[\alpha,\beta]^3$ 上一致连续.

∴对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_0>0$, 使当 $(\xi,\eta,\zeta),(\xi',\eta',\zeta')\in[\alpha,\beta]^3$ 且 $\rho(\cdot,\cdot)<\delta_0$ 时,

有 $|f(\xi,\eta,\zeta)-f(\xi',\eta',\zeta')|<\varepsilon$.

∴当 $\|T\|<\delta_1=\frac{\delta_0}{\sqrt3}$ 时,

$\rho((\xi_i,\eta_i,\zeta_i),(t_i,t_i,t_i))<\sqrt3\delta_1=\delta_0$.

$\therefore\left|\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2+z'(\zeta_i)^2}-\sqrt{x'(t_i)^2+y'(t_i)^2+z'(t_i)^2}\right|<\varepsilon$.

$\therefore\left|l(T)-\sum_{i=1}^n\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)+z'^2(t_i)}\,\Delta t_i\right|$

$\le\sum_{i=1}^n\left|\sqrt{\cdots}-\sqrt{\cdots}\right||\Delta t_i|=(\beta-\alpha)\varepsilon$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$, 使当 $\|T\|<\delta_2$ 时,

有 $\left|\sum|\vec r'(t_i)|\Delta t_i-\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|dt\right|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $\|T\|<\delta$ 时, 就有

$\left|l(T)-\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|dt\right|$

$\le\left|l(T)-\sum\vec r'(t_i)\Delta t_i\right|+\left|\sum\vec r'(t_i)\Delta t_i-\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|dt\right|$

$<(\beta-\alpha+1)\varepsilon$.

$\therefore\lim_{\|T\|\to0}l(T)=\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|dt$.

$l=\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|dt=\int\sqrt{x'(t)^2+(y'(t))^2+z'(t)^2}\,dt$.

4. 弧长参数 正则曲线 $|\vec r'(t)|>0$.

$s(t)=\int_\alpha^t|\vec r'(\tau)|d\tau$, 从起点A到点 $r(t)$ 的弧长

当 $\alpha\le t\le\beta$, $s'(t)=|\vec r'(t)|>0$, $s(t)$ 严格递增.

$\therefore s(t)$ 有反函数 $t=t(s)$.

$\vec r=\vec r(t)=\vec r(t(s))$, 记为 $\vec r(s)$

$\therefore\vec r=\vec r(s)=\begin{cases}x=x(s)\\y=y(s)\\z=z(s)\end{cases}$, $0\le s\le l$.

$\frac{ds}{dt}=|\vec r'(t)|$, $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\vec r'(t)|}$

$\therefore\vec r'(s)=\vec r'(t)\frac{dt}{ds}=\frac{\vec r'(t)}{|\vec r'(t)|}$ (单位向量).

成此参数, 自然方程. $\dot{\vec r}=\frac{d\vec r}{ds}$, $\ddot{\vec r}=\frac{d^2\vec r}{ds^2}$.

5. 曲率. 正则曲线 $L:\vec r=\vec r(t)$

切向量 $\dot{\vec r}$ 为单位向量, $\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}=1$.

求导得 $2\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r}=0$.

当 $\ddot{\vec r}\ne\vec0$ 时, $\ddot{\vec r}\perp\dot{\vec r}$, $\ddot{\vec r}$ 为法向量. 法向量

记 $\vec K=\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}$, 易知 $|\vec K|=|\ddot{\vec r}|$. 副法向量

记曲率 $K=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$, $\Delta\alpha\to0$, $|\Delta\vec r|\approx|\Delta\alpha|$

$\therefore K=\left|\frac{\Delta\dot{\vec r}}{\Delta s}\right|=|\ddot{\vec r}|=|\vec K|$.

主法向量 $\ddot{\vec r}=\frac{d\dot{\vec r}}{ds}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r'(t)}{|\vec r'(t)|}\right)\cdot\frac{dt}{ds}$

$=\left(\frac{d(\vec r'(t))}{dt}\cdot\frac{1}{|\vec r'(t)|}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\vec r'(t)|}\right)\vec r'(t)\right)\times\frac{1}{|\vec r'(t)|}$

$=\left(\frac{\vec r''(t)}{|\vec r'(t)|}+\left(-\frac{\vec r'(t)}{|\vec r'^2(t)|}\right)\right)\times\frac{1}{|\vec r'(t)|}$.

副法向量 $\vec k=\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}$

$=\frac{\vec r'(t)}{|\vec r'(t)|}\times\left(\frac{\vec r''(t)}{|\vec r'(t)|^2}+\left(-\frac{\vec r'(t)}{|\vec r'(t)|^3}\right)\right)$

$=\frac{\vec r'(t)\times\vec r''(t)}{|\vec r'(t)|^3}$.

例. 螺旋线 $x(t)=a\cos t$, $y(t)=a\sin t$, $z(t)=bt$.
的曲率.

$\vec r'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$. $|\vec r'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\vec r''(t)=(-a\cos t,-a\sin t,0)$. $|\vec r''(t)|=a$.

$K=\frac{|\vec r'(t)\times\vec r''(t)|}{|\vec r'(t)|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{\frac32}}=\frac{a}{a^2+b^2}$.

$\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

$\vec k=\frac{\vec r'(t)\times\vec r''(t)}{|\vec r'(t)|^3}$ $\quad\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x'(t)&y'(t)&z'(t)\\x''(t)&y''(t)&z''(t)\end{vmatrix}$.

若 $z(t)=0$ (平面).

则 $\vec k=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{\frac32}}\vec k$.

又 $\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2}$, 正负都可以.

参数曲面.

1. $\vec r=\vec r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

定 u / 定 v ⇒ v 曲线、u 曲线.

球面 $\vec r(\theta,\varphi)$, θ 曲线、φ 曲线.

2. 切面.

① 隐式曲面.

$\vec r'_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$

$\vec r'_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$

曲线 $l:\vec r(t)=(u(t),v(t))$ 位于面上.

$M_0:\vec r(u_0,v_0)=\vec r(u(t_0),v(t_0))$

$\vec r'(t_0)=\vec r'_u(u(t_0),v(t_0))u'(t_0)+\vec r'_v(u(t_0),v(t_0))v'(t_0)$

$\vec n=\vec r'_u(u_0,v_0)\times\vec r'_v(u_0,v_0)\ne\vec0$.

单位法向量 $\hat n=\frac{\vec r'_u\times\vec r'_v}{|\vec r'_u\times\vec r'_v|}$

$\vec r'_u\times\vec r'_v=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

* 计算 $|\vec r'_u\times\vec r'_v|^2=|\vec r'_u|^2|\vec r'_v|^2-(\vec r'_v\cdot\vec r'_u)^2=\sqrt{EG-F^2}$

$E=|\vec r'_u|^2=(x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u)$

$G=|\vec r'_v|^2=(x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v)$

$F=\vec r'_u\cdot\vec r'_v=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v$.

② 对显式曲面.

$z=f(x,y)$, $\vec r=(x,y,f(x,y))$

$\vec r'_x=(1,0,f'_x)$, $\vec r_y=(0,1,f'_y)$.

$\vec r'_x\times\vec r'_y=(-f'_x,-f'_y,1)\ne\vec0$.

3. 隐式.

① 平面隐式曲线.

② 空间隐式曲面.

$\mathrm{grad}F=(F'_x,F'_y,F'_z)\ne\vec0$. $=\vec n$.

③ 空间隐式曲线

$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

$\vec v=\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G$.