极限与连续

2022年1月27日 星期四 下午2:36

一、平面上的点集

记：$\mathbb{R}^2$为平面，$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$

主义）距离：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

1. 距离与邻域.

距离：$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

其中 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

性质：① 对称性：$\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$

② 三角性：$\rho(M_1,M_2)\ge 0$，

取等号且仅当 $M_1=M_2$

③ $\rho(M_1,M_2)\le\rho(M_1,M_3)+\rho(M_3,M_2)$

邻域：$\forall M_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

$B(M_0,r)=\{M\mid\rho(M_0,M_0)<r\}$. 开圆盘

$\dot{B}(M_0,r)=\{M\mid 0<\rho(M,M_0)<r\}$. 去心开圆盘.

$S(M_0,r)=\{M(x,y)\mid |x-x_0|<r,\ |y-y_0|<r\}$.

$S_-(M_0,r)$ $x\ge x_0$，$y\ge y_0$.

有界：$\exists M$，使 $E\subset B(O,R)\iff\exists R$，对 $\forall M\in E$，

否则称为无界. 即有 $\rho(O,M)<R$.

直径 $\mathrm{diam}\,E=\sup\{\rho(M_1,M_2)\mid M_1,M_2\in E\}$

2. 内点、外点.

设 $E\subset\mathbb{R}^2$，余集 $E^c=\{(x,y)\mid (x,y)\notin E\}\subset\mathbb{R}^2$.

内点：若 M_0 是E的内点，则 $\exists r>0$，使 $B(M_0,r)\subset E$. 则称 E^c 的

外点：若 M_0 是E的外点，则 $\exists r>0$，使 $B(M_0,r)\subset E^c$.

边界点：对 M_0 对 $\forall r>0$，

$B(M_0,r)\cap E\ne\varnothing$，$B(M_0,r)\cap E^c\ne\varnothing$.

则称 ∂E. 不是E的点，不是E的外点.

3. 孤立点与聚点.

孤立点：$M\in E$，$\exists r$，$B(M,r)\cap E=\{M\}$.

聚点：$\forall r>0$，$\dot{B}(M,r)\cap E\ne\varnothing$.

可以是E中的点也可以不是.

4. 平面点列的极限.

$M_n(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$，如果有一点 $M_0(x_0,y_0)$，

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(M_n,M_0)=0$，则 M_n 为 M_0 的

极限点，记 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0$. 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0\iff\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

$|x_n-x_0|\le\rho(M_n,M_0)$，$|y_n-y_0|\le\rho(M_n,M_0)$.

$\rho(M_n,M_0)\le|x_n-x_0|+|y_n-y_0|\to 0$.

定理：平面上的有界点列所收敛的列.

证明：$M_n(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$.

有界，$M_n\in B(M^*,R)$

$|x_n-x_0|\le\rho\le R$，$\therefore |x_n|\le R$.

$\therefore\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 有界.

$\therefore\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 且

$\{y_n\}$ 中的子列 $\{y_{n_k}\}$ 有界.

$\because\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$.

即 $\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$.

同时 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛.

即 $M_{n_k}(x_{n_k},y_{n_k})$ 收敛.

5. 开集与闭集.

开集 $E=E^\circ$. $E^\circ=\{M\mid M$ 是E的内点$\}$.

E中的点全是内点，则E为开集

(类比开区间：右点一Y已成限 左已否)

闭集 E：E^c是开集. 右点是开区间，左点不属于这个 $\therefore$ 不开闭和 $\subset$

对 $E^c=\{M\mid\rho(M,O)\le r\}$.

则 $E^c=\{M\mid\rho(M,O)>r\}$.

$\forall M\in E^c$，$\rho(M,O)>r$，E^c开集.

且是开集 $\Rightarrow$ 闭集. $\mathbb{R}^2$ 闭集

闭包：$\bar{E}=E\cup(E$的聚点$)$

性质：① E_1,E_2 是开集（闭集）

则 $E_1\cap E_2$，$E_1\cup E_2$ 是开集（闭集）.

$\forall M\in E_1\cap E_2$. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

$\exists r_1$ 使 $B(M,r_1)\subset E_1$

$\exists r_2$ 使 $B(M,r_2)\subset E_2$.

取 $r=\min\{r_1,r_2\}$，则

$B(M,r)\subset E_1\cap E_2$（有限个）

无穷个开集的并、交是开集，

但无穷个开集的交可能不是.

如 $E_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\{0\}$.

而任何闭集的并、交是闭集，

但无穷个闭集的并可能不是.

如 $E_n=[\frac{1}{n},1]$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=(0,1]$.

例：E和D_1,D_2…均为开集.

可证 $\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$ 也是开集.

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n$ 不一定是开集.

(2) 举例：取 $D_n=(0,\frac{1}{n})$，开圆

易知 $\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=\{0\}$.

已知 E_1,E_2…均为闭集，

可证 (1) $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ 也是闭集

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 不一定是闭集.

② E是开集 $\iff E\cap\partial E=\varnothing$. $\partial E\subset E^c$.

反证法 $\partial E\subset E^c$，

则 $\partial E\cap E\ne\varnothing$. 则E不都是内点.

又 ∂E 是边界，又是内点，

$\therefore M\in\partial E\cap E$. 与E都是内点.

$\therefore E\cap\partial E=\varnothing$，E中都是内点.

$\therefore E$为开集.

③ E是闭集 $\iff\partial E\subset E$.

$\partial E=\partial E^c$. $E\cup\partial E=\bar{E}$. $\bar{E}=\bar{E^c}$.

$\therefore\partial E^c\cap E^c=\varnothing$，$\partial E^c\subset E^c$. $\partial E^c=\partial E$.

$\therefore\partial E^c\subset(E^c)^\circ\subset E$. $\therefore\partial E\subset E$.

④ E是闭集 $\iff E=\bar{E}$ 闭集是它本身的聚点).

$\bar{E}=E\cup(E$的聚点$)$ 闭集是它本身.

闭集包含它的聚点. 所有的聚点都在E.

反之，E包含所有聚点

$E\cup(E$的聚点$)\to E\cup\bar{E}=\bar{E}$

$E\cup\partial E\subseteq E$，$E\cup\partial E\subseteq\bar{E}$.

6. 集合的连通性.

定义：设E $\subset\mathbb{R}^2$. 将E分成两部分A、B.

即 $E=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$. 如果A和B

中至少有一个包含另一个的点作为

聚点，则称E是连通的.

例 如. $A=\{(x,y)\mid x\le 0\}$

$B=\{(x,y)\mid x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\}$.

取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，则中中 $y_n=0$.

$(x_n,y_n)\in B$，$(0,0)\in A$.

$\therefore A$、B连通

$\xrightarrow{A\ \ B}$ 连通.

道路连通：E中任意两点 M_1、M_2，在

E中存在一条连续曲线连

接两点.

即 $\exists$ 连续函数 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$

$(a\le t\le b)$，使 $(x(a),y(a))\in E$

对 $\forall t\in[a,b]$ 成立，且有

$(x(a),y(a))$，$(x(b),y(b))\in E$.

定理：道路连通 $\to$ 连通.

设 $E=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$. 取 $M_1\in A$，$M_2\in B$.

道路连通，$\therefore\exists$ 连续曲线 $(x(t),y(t))$，

其中 $(x(a),y(a))=M_1$，$(x(b),y(b))=M_2$.

取 $t_0=\inf\{(x(t),y(t))\in B\}$.

若 $M_0=(x(t_0),y(t_0))\in A$，

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $t_0<t_0+\delta<b$ 时.

有 $|x(t)-x(t_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|y(t)-y(t_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

其中 $t_0<t_0+\delta<b$ 时，有 $(x(t),y(t))\in B$.

$\therefore(x(t),y(t))\in B(M_0,\varepsilon)$.

即 A中的M-是B的聚点. $\therefore$ 连通.

道路连通的开集称为区域

比道路连通更强：折线段连通

如 曲线 $\sim$ 道路连通（任两点存在曲线）

但不可以折线连通（不存在折线）

弧连通：E中的任何一条简单连续曲线

属于E的区域 $\subset E$.

则称为弧连通.

简单：$(x(t),y(t))\ne(x(t_1),y(t_1))$，$t\ne t_1\in(\alpha,\beta)$.

闭：$(x(\alpha),y(\alpha))=(x(\beta),y(\beta))$.

二、多元函数.

1. 映射 函数 泛函 双射.

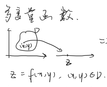
单值性：$f(A)=B$，A 的像

$f^{-1}(B)$ 原像.

映射的复合：$f:A\to B$，$g:B\to C$，

$g\circ f:A\to C$.

2. 多元函数.



$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$.

$(x,y,f(x,y))$.

称 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y)\}$ 为函数图像.

例如 $z=x^2-y^2$. $z=x^2-y^2$.

等值线.

例：$z(x)=f(x,y)$.

如图 $T=\frac{1}{2}x^2$

等值 $U(x)=-\int_0^x f(u)\,du$

例等 $E=\frac{1}{2}x^2-\int_0^x f(u)\,du$.

$\dot{E}=x\dot{x}-f(x)\dot{x}=0$. 等值.

相平面 $(x,\dot{x})$.

等阻线

例如 $\dot{x}=-x$. $E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}x^2$.

等能线为圆.

例：$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

$\vec{r}'(t)=-k\sin\frac{\pi}{r}$ 两体问题.

初量延音值. $\vec{r}\times m\vec{r}'=\vec{c}$，平面变

例等 $E=\frac{1}{2}m\vec{r}'\cdot\vec{r}'-k\frac{m\pi}{r}$ 常数

$\Rightarrow$ 可捕获方程，降一阶方程.

3. 函数的复合

$>u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

$z=f(u,v)=f(u(x,y),v(x,y))$

$>u=u(x,y)$，$z=f(u)=f(u(x,y))$

注意定义域和值域.

4. 向量值函数.

$(x,y)\longrightarrow(u,v)$. $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$

平面 $\longrightarrow$ 平面

$\vec{x}=\vec{x}\to\vec{u}=\vec{u}$. $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^2$ $\begin{cases}x=f(u,v)\\y=f(u,v)\end{cases}$

例如 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$.

$t\longrightarrow\begin{cases}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{cases}\longrightarrow\vec{r}(t)$，即 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$.

$\vec{F}=\vec{F}(u,v)=x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$.

形成 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$.

$\begin{cases}u(x,y)\\v(x,y)\end{cases}$ $z=f(u,v)$

三、极限.

1. 定义 设 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

$\forall\varepsilon>0$，一定 $\exists\delta>0$，当 $0<\rho(M,M_0)<\delta$.

有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

例：证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

$|x|\le|x|+|y|$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $0<\rho(M,M_0)<\delta$.

$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^2(\delta^2-y^2)}{x^2+\delta^2-x^2}\right|=\left|\frac{x^2-\delta^2x^2}{x^2-x^2+\delta^2}\right|$

$<\left|\frac{x^2-\delta^2x^2}{x^2-x^2-\delta^2}\right|=0<\varepsilon$.

$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x^2||y^2|}{|x^2+y^2|}\le\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)|y^2|}{|x^2+y^2|}\le\frac{1}{2}|y^2|$. $<\varepsilon$

例：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

对 $\forall\varepsilon$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $\rho(M,M_0)<\delta$.

$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|<\left|\frac{x^2+y^2}{2xy}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right|$

$x\to r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r\to 0$.

$\therefore\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{2}\right|=\frac{r^2}{2}<\varepsilon$.

2. 定理

① 设 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，

也设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

若 $M_n(x_n,y_n)\to M_0(x_0,y_0)$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=A$.

② 设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

若 $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}f(u,v)=A$，

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u=u_0$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v_0$.

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(u(x,y),v(x,y))=A$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'$.

当 $|u-u_0|<\delta'$，$|v-v_0|<\delta'$，$(u,v)\ne(u_0,v_0)$

有 $|f(u,v)-A|<\varepsilon$.

又对 $\delta'>0$，$\exists\delta>0$，

当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，$(x,y)\ne(x_0,y_0)$.

有 $|u(x,y)-u_0|<\delta'$，$|v(x,y)-v_0|<\delta'$.

代入得 $|f(u(x,y),v(x,y))-A|<\varepsilon$.

③ 累次极限与多元极限不同

思考：$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$.

设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$. 如果对 $\forall x\ne y_0$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$

存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))=A$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$.

当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，$(x,y)\ne(x_0,y_0)$.

有 $|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. $A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x,y)<A+\frac{\varepsilon}{2}$.

令 $x\to x_0$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(y)$.

则有 $A-\frac{\varepsilon}{2}\le\varphi(y)\le A+\frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore|\varphi(y)-A|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. $\therefore\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))=A$.

累次极限与多元极限

例：讨论 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y} & y\ne 0\\ 0 & y=0\end{cases}$ 的二重极限

和累次极限.

$|f(x,y)|\le|x||\sqrt{|y|}|$. 二次根.

对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta$，$0<\rho<\delta$ 时，$|f(x,y)|<\varepsilon$. 极限 $=0$.

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y))$. $(y\ne 0,x\to 0)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}$ 无极限.

例：讨论 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$，$x\ne 0$ 在 $(0,0)$ 的极限

和累次极限.

关于极限：可以仅在你或自定义域或

取 $y=kx$，$f(x,y)=k$. 极限不存在.

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$. 不存在.

④ 极限不存在

例：求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 极限不存在.

取 $y=kx^2$，$f(x,y)=f(x,kx^2)=\frac{kx^3}{x^2+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2x^2}$.

取不同 k，$f(x,y)$ 结果不同

即从不同路径到达的极限不相等.

S_1：$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 存在，$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y))=A_1$

$\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y))=A_2$

$A_1\ne A_2$，则原极限不存在.

例：求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\rho(M,M_0)<\delta$.

$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x||y|}{2|xy|}=\frac{1}{2}|x|<\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|<\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$.

例：求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，

$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|\le\delta$.

⑤ 无穷，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c$（常数）且 $c\ne 0$.

则 $f(x)$ 在 P^0 的与 $g(x)$ 等价无穷小.

$f(x,y)=o(\rho^n)$

$c>1$，$f(x,y)\sim g(x,y)$ 等价无穷小.

设当 $0<\rho<r$ 时，$g(x,y)>0$. 若存在常数 M.S.

当 $0<\rho<S$ 时，有 $0<\left|\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right|<M$.

$f(x,y)=O(g(x,y))$.

四、连续.

1. 定义：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$

例 $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{xy}} & xy\ne 0\quad(x,y)\text{处没定义}\\ 1 & xy=0\end{cases}$ 连续性.

定义域 $xy>-1$.

令 $xy=u$，$g(u)=\begin{cases}(1+u)^{\frac{1}{u}} & u\ne 0\\ 1 & u=0\end{cases}$

$\lim\limits_{u\to 0}g(u)=1=g(0)$.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|u|<\delta$ 时，

有 $|g(u)-g(0)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$，

$|xy|<\delta^2$，$|f(x,y)-f(0,0)|=|g(u)-g(0)|<\varepsilon$.

例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

对 $\forall y_0$，$y_0\ne 0$，$f(x,y_0)=\frac{2y_0x}{x^2+y_0^2}$. 连续.

$y_0=0$，$f(x,y_0)=\begin{cases}\frac{2xy_0}{x^2} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

关于x连续.

当 $x\to y$ 时，$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=1 & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

在直线 $x=y$ 上不连续.

2. 一致连续.

逆定：对 $\forall x_1,y_1\in D$，对 $\forall\delta$，$\exists\delta(x_1,y_1)>0$

当 $\rho(M,M_1)<\delta$ 时有 $|f(M)-f(M_1)|<\varepsilon$.

一致：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall(x_1,y_1)\in D$，

当 $\rho(M,M_1)<\delta$ 时有 $|f(M)-f(M_1)|<\varepsilon$.

性质

① 连续函数的四则运算连续.

$f(x,y)$，$g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

(1) 则这两个函数进行四则运算（除法要求 $g(x_0,y_0)\ne 0$）在

(x_0,y_0) 处连续.

② 连续函数复合仍然连续.

③ $f(x,y)$ 在 D上连续，$D\subset\mathbb{R}^2$ 道路连通.

则对 $\forall M_1,M_2\in D$，$f(M_1)$ 跨更到

$f(M_2)$ 到 $f(M_0)$ 中的任意值.

证明：道路连通，对 $\forall M_1,M_2\in D$，

连接曲线 $(x(t),y(t))\in D$.

使 $(x(\alpha),y(\alpha))=M_1$，$(x(\beta),y(\beta))=M_2$.

令 $f(t)=(x(t),y(t))$，$t\in[\alpha,\beta]$.

$\therefore f(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

$f(\alpha)=f(M_1)$，$f(\beta)=f(M_2)$.

$\therefore$ 对 $\forall\mu\in[f(M_1),f(M_2)]$，$\exists t$ 使 $f(t)=\mu$.

④ 有界闭集上的连续函数性质

大、最小值.

证明：若不上界，则对 $\forall M$，$\exists(x_n,y_n)\in D$.

使 $f(x_n,y_n)>M$.

$\therefore\exists(x_{n_k},y_{n_k})\to(x_0,y_0)\in D$.

又由连续性.

$f(x_0,y_0)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k},y_{n_k})\ge\lim\limits_{k\to\infty}M_k=+\infty$.

$\therefore f(x_0,y_0)$ 在D有上界. $\therefore$ 有上确界.

即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists(x_0,y_0)\in D$.

使 $A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0,y_0)\le A$.

有收敛子列. $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k},y_{n_k})=f(x_0,y_0)$.

$\therefore A<f(x_0,y_0)\le A$.

⑤ 有界闭集上的连续函数一致连续.

证明：作法 假设在D上连续 但不一致连续.

则 $\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，都存在 (x_1,y_1) (x_2,y_2).

使 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$，但 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\ge\varepsilon_0$.

特别的取 $\delta=\frac{1}{n}$，则对 $\forall n$，存在两点 $M_n(x_n,y_n)$

$M_n'(x_n',y_n')$ 即有

$\sqrt{(x_n-x_n')^2+(y_n-y_n')^2}<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n,y_n)-f(x_n',y_n')|\ge\varepsilon_0$.

(x_n,y_n) (x_n',y_n') 都有界.

则都存在收敛子列 $m,\dots n_k$.

使 (x_{n_k},y_{n_k}) (x_{n_k}',y_{n_k}') 均收敛.

设 $(x_{n_k},y_{n_k})\to(x_0,y_0)$. $(x_{n_k}',y_{n_k}')\to(x_0',y_0')$.

$\sqrt{(x_0-x_0')^2+(y_0-y_0')^2}<\frac{1}{n_k}$. 令 $k\to+\infty$.

则有 $\sqrt{(x_0-x_0')^2+(y_0-y_0')^2}\le 0$. 即 $(x_0,y_0)=(x_0',y_0')$.

连续. 又 $|f(x_{n_k},y_{n_k})-f(x_{n_k}',y_{n_k}')|\ge\varepsilon_0$

令 $k\to+\infty$，$|f(x_0,y_0)-f(x_0',y_0')|\ge\varepsilon_0$ 矛盾.

1. 定义：

设D是坐标的平面上集. $f:D\to\mathbb{R}$ 为二元

函数. $M_0\in D$. 如果对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，

使当 $M\in D$ 且 $\rho(M,M_0)<\delta$ 时，$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$.

则称 $f(x,y)$ 在 M_0 处连续.

① 若 M_0 为孤立点，则 f 在 M_0 处必连续.

若D为有限多个点的点集，则这又在

D上的任意 f 都连续.

② 若 M_0 为聚点，则 f 在 M_0 处连续 $\iff$

$\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$.

③ M 可为 $D\cap B(M_0,\delta)/\{M_0,\delta\}$.

例：在定义域 $xy>-1$ 上，证明

$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{xy}} & xy\ne 0\\ 1 & xy=0\end{cases}$ 在 (x,y) 连续.

证明 ① 看 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时.

$|(1+x)^{\frac{1}{x}}-1|<\varepsilon$.

② 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<|x|<\delta$，$0<|y|<\delta$ 时，

$|xy|<\delta^2=\varepsilon$. $\therefore|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$.

改定义域

③ 又当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$f(x,y)=f(0,0)=\varepsilon$.

$\therefore$ 当 $(x,y)\in D\cap S(0,\delta)$ 时.

$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$.

2. 一致连续.

设 $f(x,y)$ 在平面部分点. 果上有定义. 若对

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 (x,y)，$(x',y')\in D$，且

$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$.

则称 f 在D中一致连续

(将 (x',y') 替换为 (x_0,y_0)，可改连续).