# 例题

2022年3月5日 星期六　上午10:13

## 一、极限与连续.

例. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & y\neq0 \\ 0 & y=0\end{cases}$ 的二重极限和累次极限.

例. 讨论 $f(x,y)=\frac{y}{x}, x\neq0$ 在(0,0)的极限和累次极限.

例. 求证 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$.

1. (1) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$.

(2) $f(x,y)=\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$

(3) $f(x,y)=(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$.

2. (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{\frac{1}{x^2-y^2}}$　(2) $\lim\limits_{\rho\to0^+}e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{x-y}-1}{x-y}, & x>y\\ 1, & x=y\\ \frac{\sin x-\sin y}{x-y}, & x<y.\end{cases}$

## 二、求导与可微.

例. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

例. $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 沿 $\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数.

例. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在(0,0)处的方向导数.

例. $u=f(x,y,z)$, $y=\varphi(x,r)$, $z=\psi(x,y,r)$.
求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial r}$.

例. $u=\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 拉普拉斯方程.

例. D是空间凸区域, 原点在D内.
任意两点连线在D内
设存在D内的可微函数 $f(x,y,z)$
满足 $xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=0$.
求证: $f(x,y,z)$ 恒为常数.

例. 若函数 $f(x,y,z)$ 满足对 $\forall t>0$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为k次齐次函数. $k\in\mathbb{R}$.
求证: 可微函数 $f(x,y,z)$ 为k次齐次函数
$\Leftrightarrow xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z)$

3. $f(x,y)$ 在(0,0)可微, $f(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$.
证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $g_1$, $g_2$ 使 $f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y)$.

1. 设 $a_1,\dots a_n$ 是非零常数, $f(x_1,\dots x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微,
求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得
$f(x_1,\dots,x_n)=F(a_1x_1+\dots+a_nx_n)$ 的充分必要条件是
$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $i,j=1\dots n$.

## 三、隐函数与反函数

例. $F(x,y)=\sin(x+y)+2x+y=0$.
求在 $(x,y)=(0,0)$ 附近 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1. 试证方程 $u_{xx}+2u_{xy}\cos x-u_{yy}\sin^2x-u_y\sin x=0$
经过 $\begin{cases}\xi=x-\sin x+y\\ \eta=x+\sin x-y\end{cases}$ 变换后为 $u_{\xi\eta}=0$.

2. 变量代换 $u=\frac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$
把 $z=z(x,y)$ 的方程 $y\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{x}{y}$
化为 $w=w(u,v)$, 求 $w=w(u,v)$.

## 四、Taylor展开与极值

最值 { 存在: 有界闭 { 区域平移/补一条边. 把区域变闭集 取一小块.
计算 { Lagrange乘数 直接求(向量方法) } 驻点 → 判断.

例: 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 可微, 且 $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\rho}=+\infty$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.
试证: 对 $\forall\vec{v}=(v_1,v_2)$, 存在 $(x_0,y_0)$ 使
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=v_1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=v_2$, 即 $\operatorname{grad}f=\vec{v}$.

例. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域D上连续并有偏导. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$
且 $f(x,y)|_{\partial D}=0$, 则 $f(x,y)|_D\equiv0$.

例. $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$, 直线 $y=ax+b$ 上.
计算 $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ 的最值.

例. $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$, $x\geq0$, $y\geq0$, $x+y\leq\pi$.
求 $f(x,y)$ 在D上的极值.

例. 试将正数a分成n个数的和, 使其乘积最大

例. 求在约束条件 $(x-1)^2+y^2-1=0$ 下 $z=xy$ 的极值.

例. 求由原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

例. $x,y,z\geq0$, $x+y+z=1$, 试用Lagrange乘数法求 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c$ 的最大值, 其中a.b.c为给定的正数.

例. $x+y+z=0$, 求 $f(x,y,z)=\cos x+\cos y+\cos z$ 范围.

例. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}$ 为实数.
求 $f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\dots$
在 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上的最大值.

1. 对函数 $f(x,y)=\sin\pi x+\cos\pi y$, 运用中值定理, 证明: 存在一个数 $0<\theta<1$, 使得有
$\frac{4}{\pi}=\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin[\frac{\pi}{2}(1-\theta)]$.

1. 设 $x_1, x_2\dots x_n$ 是正数, $x_1+x_2+\dots+x_n=n$.
用Lagrange乘数法证明
$x_1x_2\cdots x_n(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n})\leq n$.

2. 设 $a_i\geq0$, $p>1$, 证明:
$\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\leq(\frac{a_1^p+\dots+a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$.

3. 证明 $\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$. $(x\geq0, y\geq0)$.

---

例. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & y\neq0 \\ 0 & y=0\end{cases}$ 的二重极限和累次极限.

$|f(x,y)|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. → 放缩.

对 $\forall\varepsilon$, $\exists\delta$, $0<\rho<\delta$ 时, $|f(x,y)|<\varepsilon$. 极限 $=0$.

累次极限 $\lim\limits_{y\to0}(\lim\limits_{x\to0}f(x,y))=0$. $(y\neq0, x\to0)$.

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{y\to0}\sin\frac{1}{y}$ 无极限.

例. 讨论 $f(x,y)=\frac{y}{x}, x\neq0$ 在(0,0)的极限和累次极限.

关于极限: 可以仅在邻域与定义域而交.

取 $y=kx$, $f(x,y)=k$, 极限不存在.

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{x}=0$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}y\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$ 不存在.

例. 求证: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$.

证明: $x.y$ 有一个为零, $\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$.

$x.y$ 均 $\neq0$,　$D:(x.y)\neq(0,0)$

$\frac{x^2y\cdot y}{x^4+y^2}\leq\frac{\frac{1}{2}(x^4+y^2)|y|}{x^4+y^2}=\frac{1}{2}|y|<\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon$.

则 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$\left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}-0\right|<\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$.

例. 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$.