向量与坐标系

2022年2月13日 星期日 下午4:18

一、向量的运算

1. 加法和数乘.

2. 点乘

① $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$. 夹角 $\theta=\theta(\vec{a},\vec{b})$.

$\theta(\vec{a},\vec{b})=\theta(\vec{b},\vec{a})$, 且 $\theta(k\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}\theta(\vec{a},\vec{b}), & k>0\\ \pi-\theta(\vec{a},\vec{b}), & k<0.\end{cases}$

$\vec{a}=\vec{a}_e+\vec{a}_n$, $\vec{a}_e=|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{e}=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$.

② 定义 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta(\vec{a},\vec{b})$. $\theta\in[0,\pi]$

③ 性质: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}_e\cdot\vec{b}$.
单位向量 $\vec{e}$, $\vec{a}\cdot\vec{e}=\vec{OA'}$ 有向线段.

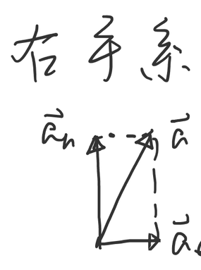
3. 叉乘.

① 定义: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

方向与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 构成右手系.

$\vec{a}=\vec{a}_e+\vec{a}_n$

$\vec{a}_e=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$.



$\vec{e}$ 与 $\vec{a}$ 张成的平行四边形) S

$\vec{e}$ 与 $\vec{a}_n$ 张成的矩形

$\vec{e}\times\vec{a}=\vec{e}\times\vec{a}_n$

② 性质: $(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

4. 向量的坐标表示.

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$. 标准正交基. $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3$

$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 为一组基, 满足:

① $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}\ (\forall i,j)$ 两两垂直.

② $\vec{e}_1\times\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=1$, 空间右手系.

(x_1,x_2,x_3) 为坐标.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$.

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $\theta(\vec{a},\vec{b})=\arccos\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)\\&=a_1b_2\vec{e}_1\times\vec{e}_2+a_1b_3\vec{e}_1\times\vec{e}_3\\&\quad+a_2b_1\vec{e}_2\times\vec{e}_1+a_2b_3\vec{e}_2\times\vec{e}_3\\&\quad+a_3b_1\vec{e}_3\times\vec{e}_1+a_3b_2\vec{e}_3\times\vec{e}_2\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e}_3\\&=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)\\&=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\\&=\begin{vmatrix}\vec{e}_1&\vec{e}_2&\vec{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

5. 其他运算

① $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$.

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=-\vec{A}\cdot\vec{C}\times\vec{B}$

② $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})$
(m o = m two dotted − o two dotted.)

$(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}=\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})-\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})$.
(o m = m two − o two)

③ $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$.

例. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$.

S1 记 $\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdots\cdots$, 要证 $\vec{x}=\vec{0}$.

设 $\vec{x}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面时.

先证 $\vec{x}\cdot\vec{a}=0$. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$.

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{x}\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{a})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0$.

同理可证 $\vec{x}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore \vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot(\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c})=0$, $\therefore \vec{x}=\vec{0}$.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面时,

不妨设 $\vec{c}=\mu_1\vec{a}+\mu_2\vec{b}$

则 $\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\mu_1\vec{a}+\mu_2\vec{b})+[\vec{b}\times(\mu_1\vec{a}+\mu_2\vec{b})]\times\vec{a}$
$\quad+((\mu_1\vec{a}+\mu_2\vec{b})\times\vec{a})\times\vec{b}$
$=\mu_1(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}+\mu_2(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}$
$\quad+\mu_1(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{a}+\mu_1(\vec{b}\times\vec{b})\times\vec{a}$
$\quad+\mu_2(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{b}+\mu_2(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}$.

S2. $F(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}$

按 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 分别线性. 拆分.

$F(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda_1F(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\lambda_2F(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均是 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的组合.

故验证所有 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 使 $F(\ldots)=\vec{0}$.

分类 $\begin{cases}F(\vec{i},\vec{i},\vec{i}) & \text{全同 (对称性)}\\ F(\vec{i},\vec{i},\vec{j}) & \text{两个同}\\ F(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) & \text{不同.}\end{cases}$

二、空间坐标系.

(1) 直角坐标系

1. 建系

在空间中任取一点 O, 则空间的一点 P 对应的向量 $\vec{OP}$ 为 P 的位置向量.

$\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\to(x,y,z)$

2. 概念.

坐标系 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$. → x, y, z 轴.

坐标轴. 平面. 卦限.

向量空间 V^3 → 数组空间 $\mathbb{R}^3$.

$\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

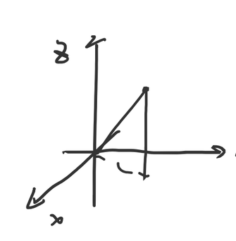
$\vec{OP}$ 与坐标轴的夹角 α,β,γ,

方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

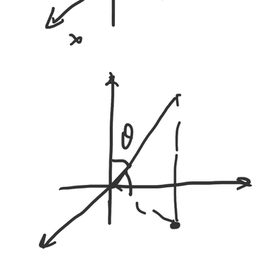
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(2) 平面极坐标系

(3) 柱坐标系. 极坐标 + z.



(4) 球坐标系.



$x=r\sin\theta\cos\varphi$
$y=r\sin\theta\sin\varphi$
$z=r\cos\theta$.

三、坐标变换

1. 平移

$\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{O'P}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

$\vec{O'P}=\vec{OP}-\vec{OO'}$, $\vec{OO'}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$,

则 $x'=x-a$, $y'=y-b$, $z'=z-c$.

2. 旋转.

夹角变化 $\begin{cases}\vec{i}'=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k}.\\ \vec{j}'=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k}.\\ \vec{k}'=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}.\end{cases}$

$(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\cos\alpha_2&\cos\alpha_3\\ \cos\beta_1&\cos\beta_2&\cos\beta_3\\ \cos\gamma_1&\cos\gamma_2&\cos\gamma_3\end{pmatrix}$ — 旋转矩阵 A

$\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}'$

$=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

$\therefore \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1\\x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2\\x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3\end{pmatrix}$

A 是正交矩阵, $\cos\alpha_i\cos\alpha_j+\cos\beta_i\cos\beta_j+\cos\gamma_i\cos\gamma_j=\delta_{ij}$

绕 x 轴旋转 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

y 轴 $A=\begin{pmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta\\0&1&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta\end{pmatrix}$

z 轴 $A=\begin{pmatrix}\cos\gamma&\sin\gamma&0\\-\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

向量

1. $\vec{a}$. $\vec{AB}$. $\vec{0}$.

$\vec{a}\neq0$ 时, $\vec{e}_a=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, $\vec{a}^{\circ}$.

共线

平行 → 向量不为零.

2. 共线 ⟺ $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$, $\lambda,\mu\neq0$. 线性相关.

共面 ⟺ $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$, $\lambda,\mu,\nu\neq0$

(线性相关. 线性组合).

证明: $\vec{a},\vec{b}$ 共线.

若(至少)有一个是零向量. ⇒ √.

都不为零向量. $\vec{b}=k\vec{a}$, $k\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ √.

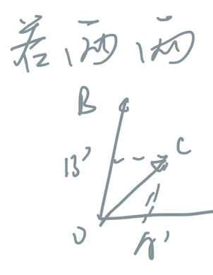
$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$, 不妨设 $\mu\neq0$.

$\vec{b}=-\dfrac{\lambda}{\mu}\vec{a}$ ⇒ 共线. √

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

若有两个共线.

若两两不共线 (则都不是零).



$\vec{OC}=\vec{OA'}+\vec{OB'}$
$=k\vec{a}+l\vec{b}$.

$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$. $\nu\neq0$. ...

3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

证明: $\vec{c}=\vec{0}$. ⇒ √.

$\vec{c}\neq0$. $\vec{c}=\vec{e}$. $\vec{a}\cdot\vec{e}=\vec{OA'}$, $\vec{b}\cdot\vec{e}=\vec{A'B'}$.

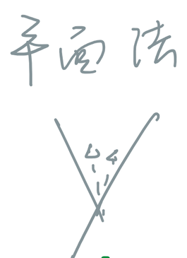
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}=\vec{OB'}$.

且 $\vec{OB'}=\vec{OA'}+\vec{A'B'}$.

$\vec{c}=\lambda\vec{e}$. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\lambda\vec{e}=\lambda(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}$
$=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e})$
$=\vec{a}\cdot\lambda\vec{e}+\vec{b}\cdot\lambda\vec{e}$.

例. 已知异面直线 a, b 成 60° 角, M 为空间定点, 则过点 M 且与 a, b 都成 45° 的平面有一个.

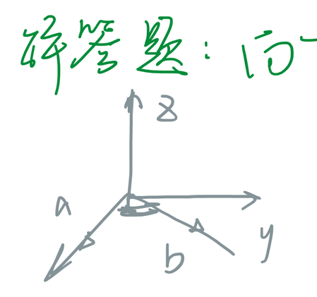
平面法向量与 a, b 成 45°.



2个. √

题意: a, b 过 M, 夹角 60°.
过 M, 与 a, b 成 45° 的直线.

解答题: 向量方法.



单位向量 $\vec{a}=(1,0,0)$
$\vec{b}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

在所求直线上取单位向量 $\vec{c}$,

使 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 夹角为 45°.

设 $\vec{c}=(x,y,z)$. $x^2+y^2+z^2=1$

a. c 夹角 45° $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos45^\circ=x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. c 夹角 45°.

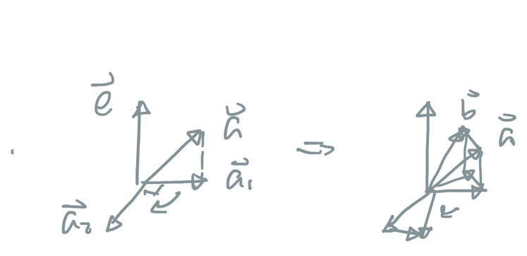
$\vec{b}$. $\vec{c}$ 夹角 45°. $\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y$.
$y=\sqrt{\frac{1}{6}}$, $z=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

$\vec{b}$. $\vec{c}$ 夹角 135°. $\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y$.
$y=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 无解.

4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

证明: $\vec{c}=\vec{0}$ √

$\vec{c}\neq\vec{0}$. $\vec{c}=\vec{e}$.



$\vec{a}_2=\vec{a}\times\vec{e}$. $|\vec{a}\times\vec{e}|=|\vec{a}_1|=|\vec{a}_2|$.

方向: 垂直. 右手系.

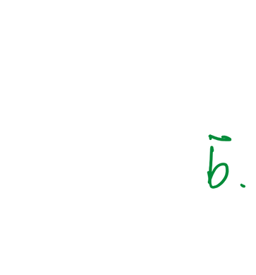
⇒ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{e}=\vec{a}_2+\vec{b}_2=\vec{a}\times\vec{e}+\vec{b}\times\vec{e}$.

$\vec{c}=c\vec{e}$.

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\times c\vec{e}$
$=c(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{e}$
$=c(\vec{a}\times\vec{e}+\vec{b}\times\vec{e})$
$=c\vec{a}\times\vec{e}+c\vec{b}\times\vec{e}$
$=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

5. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ (无括号不会出现误解).

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 的绝对值是以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

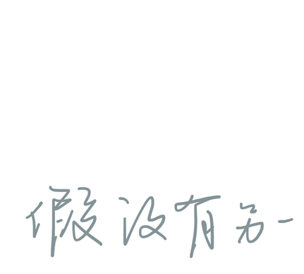


$V=|\vec{a}\times\vec{b}|\,h$, $h=|c\vec{e}|=|\vec{e}\cdot\vec{c}|$
$=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{e}\cdot\vec{c}|$
$=||\vec{a}\times\vec{b}|\vec{e}\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}|$

共面 ⟺ $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ⟺ 行列式为 0.

6. 向量组 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ 是 V 中的基向量, 则 V 中任意向量 $\vec{x}$ 可表示为 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ 的线性组合 $\vec{x}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$, 且唯一. (x_1,x_2,x_3) 为坐标.

证明:



任意 P, $\vec{x}=\vec{OP}$

作平行线 PP'.

$\vec{x}=\vec{OP}=\vec{OP'}+\vec{P'P}$
$=\vec{OA'}+\vec{A'P'}+\vec{P'P}$
$=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$.

假设有另一种表示 $x_1'\vec{a}+x_2'\vec{b}+x_3'\vec{c}=\vec{x}$.

则 $(x_1-x_1')\vec{a}+(x_2-x_2')\vec{b}+(x_3-x_3')\vec{c}=\vec{0}$.

不共面 ⟺ 线性无关 ⇒ 都为零.

$x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$, $x_3=x_3'$.

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ 构成一组仿射坐标系.

坐标系

1. $\vec{i}$. $\vec{j}$. $\vec{k}$ 正交单位向量.

$\vec{OP}=(x,y,z)$. $x=\vec{OP}\cdot\vec{i}=|\vec{OP}|\cos\alpha$
$y=\vec{OP}\cdot\vec{j}=|\vec{OP}|\cos\beta$.
$z=\vec{OP}\cdot\vec{k}=|\vec{OP}|\cos\gamma$.

$\vec{OP}=|\vec{OP}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

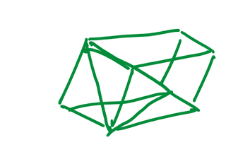
$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为与 $\vec{OP}$ 同向的单位向量.

例. 四面体四个顶点 A(1,2,3), B(2,1,4), C(1,3,5), D(3,2,1), 求四面体体积.

$\vec{AB}=(1,-1,1)$. $V=(\vec{AB}\times\vec{AC}\cdot\vec{AD})\frac{1}{6}$. 四面体

$\vec{AC}=(0,1,2)$ $=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\2&0&-2\end{vmatrix}=\dfrac{|-2-4-2|}{6}=-8$

$\vec{AD}=(2,0,-2)$. $=\frac{4}{3}$.



例. 求垂直于向量 $\vec{a}=(-1,2,1)$, $\vec{b}=(1,0,3)$ 的单位向量.

注意 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 张成平面, 法向量有2个.

S1. 非零向量 (x,y,z) 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 垂直.

$\begin{cases}-x+2y+z=0\\x+3z=0\end{cases}$ ⇒ 取 $(-3k,-2k,k)$, $k\neq0$.

$\therefore$ 单位化 $\pm\dfrac{(3,2,-1)}{\sqrt{14}}$.

S2. $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(-1,2,1)\times(1,0,3)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}$

$=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

单位化 $\pm\dfrac{(3,2,-1)}{\sqrt{14}}$.

例. 设 ABCD 是空间一个四面体, 已知 AB ⊥ CD, AC ⊥ BD, 求证: AD ⊥ BC.

设 $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AD}=\vec{d}$.

则有 $\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0$, $\vec{c}\cdot(\vec{d}-\vec{b})=0$. $(\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0)$.

$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$.

$\therefore \vec{d}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$, $\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$. $\therefore$ AD ⊥ BC.

对于空间任意四点均成立.

特别若 A.B.C 共面, 形成三角形, 则 D 为垂心.

2. 坐标变换.

① 坐标系平移

原: O, x, y, z. → 后: O', x', y', z'.

$\vec{OO'}=(a,b,c)$, $\begin{cases}x=x'+a\\y=y'+b\\z=z'+c.\end{cases}$

② 坐标系旋转

$\begin{pmatrix}\vec{i}'\\\vec{j}'\\\vec{k}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\cos\beta_1&\cos\gamma_1\\\cos\alpha_2&\cos\beta_2&\cos\gamma_2\\\cos\alpha_3&\cos\beta_3&\cos\gamma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{pmatrix}$

$\vec{i}$. $\vec{j}$. $\vec{k}$ 两两正交且单位,

$\therefore \cos\alpha_i\cos\alpha_j+\cos\beta_i\cos\beta_j+\cos\gamma_i\cos\gamma_j=\delta_{ij}$.

A 为标准正交基. (行向量为1且正交).

$\therefore AA^T=A^TA=I$.

设 $\vec{OP}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{pmatrix}=(x',y',z')\begin{pmatrix}\vec{i}'\\\vec{j}'\\\vec{k}'\end{pmatrix}$

$=(x',y',z')A\begin{pmatrix}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{pmatrix}$

坐标唯一, $(x,y,z)=(x',y',z')A$.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^T\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

设 z 轴保持不动.

$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

例. 作变换 $\begin{cases}x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}\\y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}\\z=z'.\end{cases}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$