空间线与面

2022年2月19日 星期六　　上午10:38

一、平面方程.

1. 平面的一般方程.

①平面由一个点和一个方向确定.

$P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$（P在平面上）. $\vec{n}=(a, b, c)$.

$\overrightarrow{PP_0} \perp \vec{n}$, $a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)=0$,

记为 $ax+by+cz+d=0$, $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$.

平面上的点满足平面的一般方程.

②特殊情况 $d=0$ 过原点.

$c=0$ $\vec{n}=(a, b, 0) \perp z$轴. 平面 // z轴.

例如 $ax+by=0$. 代入 $(0,0,z)$, 恒成立. 故平面过z轴.

$a=b=0$ $\vec{n}=(0,0,c)$ // z轴. 平面 // xy平面.

2. 三点决定的平面.

给定 $P_1(x_1, y_1, z_1)$. $P_2(x_2, y_2, z_2)$. $P_3(x_3, y_3, z_3)$

$\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$. $\therefore \overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3})=0$.

$$\therefore \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \text{. 平面方程.}$$

若过坐标轴上的三点 $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$ $(0,0,\gamma)$

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y & z \\ -\alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & \gamma \end{vmatrix}=0, \quad \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1.$$

3. 两平面的关系.

①平行: $\vec{n_1} // \vec{n_2}$. $\vec{n_1}=\lambda\vec{n_2}$. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}=\lambda$, 则重合.

②相交: $\vec{n_1}$. $\vec{n_2}$ 形成夹角 θ (两平面夹角 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$)

$$\cos\theta=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

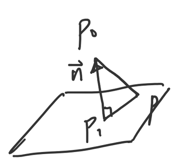
若 $\cos\theta=0$, $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$, 则垂直.

例. 求通过 z轴且与平面 $x-2y+5=0$ 垂直的平面方程.

设该平面 $ax+by=0$, a. b 不全为0.

垂直, $a-2b=0$, 取 $a=2$, $b=1$. $\therefore 2x+y=0$

4. 点到平面的距离.



$P_0(x_0, y_0, z_0)$. π: $ax+by+cz+d=0$

过 P_0 作 π 的垂线, 垂足 P_1.

π 上任取一点 $P(x, y, z)$, $\overrightarrow{PP_0}$ 与 $\vec{n}$ 夹角为 θ.

$$\text{则 } |P_0P_1|=|PP_0||\cos\theta|=\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\overrightarrow{PP_0}\right|$$
$$=\frac{|a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=d.$$

判断 P_0 与 π 的方位: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_0}=ax_0+by_0+cz_0+d$ 正负.

二、直线方程.

1. 点向式方程.

$P_0(x_0, y_0, z_0)$. 方向向量 $\vec{v}=(l, m, n)$.

则对直线上任意点 $P(x, y, z)$. $\overrightarrow{PP_0}$ 与 $\vec{v}$ 共线.

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=t(l, m, n)$, $\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{v}$

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ ($l, m. n$ 均 $\neq 0$).

若 $l=0$, 则 $x=x_0$. 类推.

2. 两平面交线

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

直线的一般方程 ($\vec{v}\perp\vec{n_1}$, $\vec{v}\perp\vec{n_2}$, $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$).

3. 两直线的位置关系.

L_1: $\vec{r}=\vec{r_1}+t\vec{v_1}$, $\vec{r_1}=(x_1, y_1, z_1)$. $\vec{v_1}=(l_1, m_1, n_1)$.

L_2: $\vec{r}=\vec{r_2}+t\vec{v_2}$. $\vec{r_2}=(x_2, y_2, z_2)$. $\vec{v_2}=(l_2, m_2, n_2)$.

共面: $\vec{v_1}$. $\vec{v_2}$ 与 $\vec{r_1}-\vec{r_2}$ 共面, $(\vec{r_1}-\vec{r_2})\cdot\vec{v_1}\times\vec{v_2}=0$.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

⇒ 平行. $\vec{v_1}\times\vec{v_2}=0$.
相交. $\vec{v_1}$. $\vec{v_2}$ 不平行.

异面: $(\vec{r_1}-\vec{r_2})\cdot\vec{v_1}\times\vec{v_2}\neq 0$.

$$\text{直线夹角 } \cos\theta=\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

若共面, 当 $|\cos\theta|=1$ 时, 直线平行

$|\cos\theta|<1$ 时, 直线相交

$\cos\theta=0$, 垂直.

例. 一直线过点 $(1,1,1)$, 且和两直线 $\begin{cases} L_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \\ L_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1} \end{cases}$ 相交, 求方程.

设直线 L: $\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}$, $l. m. n\neq 0$.

L_1 过 $P_1(0,0,0)$, L_2 过 $P_2(1,-2,1)$.

$$\text{共面} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix}=l-2m+2n=0$$

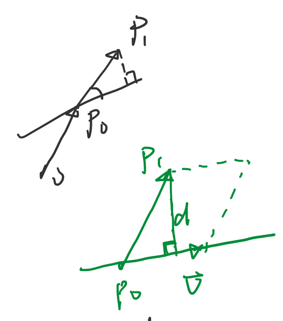
得 $m=\frac{5}{4}l$, $n=\frac{3}{2}l$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=14l-4m-6n=0$$

取 $l=4$, 则 $(l, m, n)=(4,5,6)$. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{6}$.

检验不平行. $\vec{v}$ 与 $\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$ 不平行.

4. 点到直线的距离.



L: $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}$. $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

$r_0=\overrightarrow{OP_0}=(x_0, y_0, z_0)$.

$\overrightarrow{P_0P_1}$ 与 $\vec{v}$ 夹角为 θ,

$$\text{则 } d=|\overrightarrow{P_0P_1}|\sin\theta=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{v}|}$$
$$=\frac{|(l, m, n)\times(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$
$$=\frac{|(m(z_1-z_0)-n(y_1-y_0))\vec{i}+\cdots\vec{j}+\cdots\vec{k}|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

5. 直线与平面的位置关系.

L: $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}$, $\vec{v}=(l, m, n)$.

π: $(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}=0$, $\vec{n}=(a, b, c)$.

$\vec{v}$. $\vec{n}$ 夹角为 θ, 线. 面夹角 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $-\frac{\pi}{2}+\theta$.

则有 $\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}$.

①垂直, $\vec{n}$ // $\vec{v}$. $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$.

②平行, $\vec{n}\perp\vec{v}$. $al+bm+cn=0$. (线在平面内)

③相交, $\sin\varphi<1$, 设交点 $P'(x', y', z')$.

则 $\vec{P'}$ 满足 $\begin{cases} (\vec{r'}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}=0 \\ \vec{r'}=\vec{r_0}+t\vec{v} \end{cases}$ 参数 t 代入平面方程.

解得 $t=-\frac{(\vec{r_0}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{n}}=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{al+bm+cn}$, $d=-\vec{r_1}\cdot\vec{n}$.

三、二次曲面.

$F(x, y, z)=0$, 平面方程, 两个自由度.

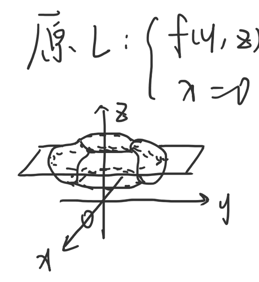
1. 柱面

一个变量自由, 如 z, 则方程 $f(x, y)=0$.

准线沿 $f(x, y)=0$ 平动获得母线.

2. 旋转曲面.

原 L: $\begin{cases} f(y, z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转.



$r_0=\sqrt{x^2+y^2}$, (r, z) 绕 z 轴形成圆.

$f(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$.

1. 平面二次曲线方程.

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$.

$a. b, c, d. e, f$ 为实常数. 且 $a. b. c$ 不全为0.

例. 直线 l_1: $a_1x+b_1y+c_1z=0$ 相交.

直线 l_2: $a_2x+b_2y+c_2z=0$.

则 $(a_1x+b_1y+c_1z)(a_2x+b_2y+c_2z)=0$

直线开集, 归为双曲线.

2. 空间二次曲面方程.

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$
$+b_1x+b_2y+b_3z+c=0$.

3. 空间二次曲面分类.

①柱面. 空间曲线 l 作为准线,

方向向量 $\vec{v}$ 过 l 作为母线.

l: $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

柱面上取一点 $P(x, y, z)$,

则 P 在 xOy 平面上投影 $P_1(x, y, 0)$.

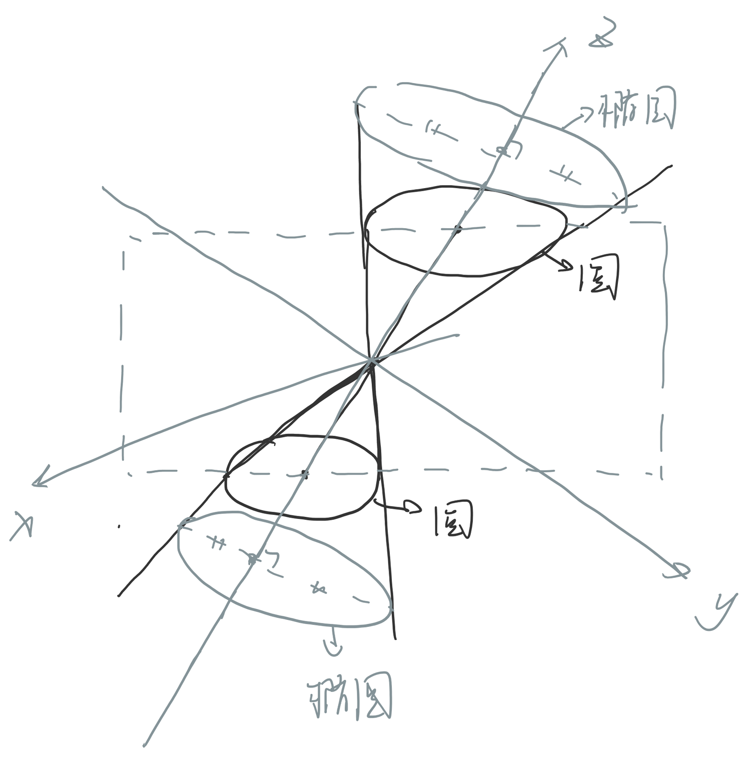
P_1 在准线 l 上, 即满足 $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

⇒ 以 l 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面为 $F(x, y)=0$.

柱面准线 L 上一点 (x_1, y_1, z_1)

母线方程 $\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$.

准线方程 $\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1)=0 \\ F_2(x_1, y_1, z_1)=0 \end{cases}$



锥面. 空间曲线 l 作为准线,

不在 l 上的点 O 与 l 上的点连接作为母线.

锥面准线 L 上一点 (x_1, y_1, z_1),

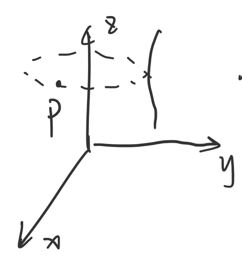
顶点 (x_0, y_0, z_0).

母线方程 $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

准线方程 $\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1)=0 \\ F_2(x_1, y_1, z_1)=0. \end{cases}$

②旋转曲面.

设在 Oyz 平面上曲线 L: $\begin{cases} F(y, z)=0 \\ x=0. \end{cases}$



在旋转曲面上取一点 $P(x, y, z)$,

过点 P 与旋转轴垂直的平面与旋转曲面交线为圆,

特殊为圆心 $(0,0,z)$, 半径 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

则曲线 l 上的 $P_1(0, \pm\sqrt{x^2+y^2}, z)$. $\therefore F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$.

母线为 $\begin{cases} F_1(x, y, z)=0 \\ F_2(x, y, z)=0 \end{cases}$, 轴 l: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

任意一点 M_1 $F_1(x_1, y_1, z_1)=0$, $F_2(x_1, y_1, z_1)=0$.

同时, 纬圆 $\begin{cases} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2. \end{cases}$

3. 椭球面. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4. 双曲面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 单叶双曲面.

截口双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 双叶双曲面.

截口双曲线 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{y^2}{b^2}$.

5. 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

6. 椭圆抛物面. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

7. 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$