亿些错题

2022年3月20日 星期日 上午8:45

一、平面与直线.

1. 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$ 所成两个二面角的平分面.

平分 ⇒ 点到两个平面距离相等.

$d_1=\frac{|2x-y+z-7|}{\sqrt{4+1+1}}=d_2=\frac{|x+y+2z-11|}{\sqrt{1+1+4}}$

$2x-y+z-7=x+y+2z-11$

$\Rightarrow x-2y-z+4=0$

$2x-y+z-7=-x-y-2z+11$

$\Rightarrow 3x+3z-18=0,\ x+z-6=0.$

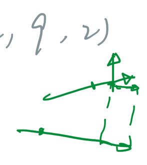
2. 求直线之间的距离.

(1) $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ 和 $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

取点 $P_1(9,-2,0)$ $P_2(0,-7,2)$

法向 $\vec{v_1}=(4,-3,1)$. $\vec{v_2}=(-2,9,2)$

$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=(3,\ 2,\ -6)$



$\overrightarrow{P_1P_2}=(9,5,-2)$,

$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|}=\frac{27+10+12}{\sqrt{9+4+36}}=7.$

(2) $\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$

点 $P_1(1,0,0)$ $P_2(0,0,-2)$

$\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(0,-1,-1)$

$\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=(6,-3,0)$

求直线 $l_1: x-1=y=z$ 绕 $x=y=0$ 旋转所得面方程.

S1. $P(x,y,z)$ 由 l_1 上 $Q(t+1,t,t)$ 转得.

取 l_2 上 $O(0,0,0)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\perp l_2\\|OP|=|OQ|.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(x-t-1,y-t,z-t)\cdot(0,0,1)=0\\x^2+y^2+z^2=(t+1)^2+2t^2.\end{cases}$ $t=z$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=3z^2+2z+1$

$x^2+y^2-2z^2-2z-1=0.$

S2. l_2: $\vec{v}=(0,0,1)$. 过 $(0,0,0)=O$.

平面 $z=t$, 与 l_1 交于 $(t+1,t,t)$

$|\overrightarrow{OP_0}\times\vec{v}|=|\overrightarrow{OP}\times\vec{v}|$

$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&1\\t+1&t&t\end{vmatrix}=|(-t,t+1,0)|=t^2+t^2+2t+1.$

$\begin{vmatrix}i&j&k\\0&0&1\\x&y&z\end{vmatrix}=(-y,x,0)$ $=x^2+y^2$.

$x^2+y^2=2t^2+2t+1$, $x^2+y^2-2z^2-2z-1=0.$

二、空间曲面.

1. 旋转曲面.

(1) 曲线 $\begin{cases}y^2-\frac{z^2}{3}=1\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴一周.

$r^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2-\frac{z^2}{3}=1$.

曲线 $\begin{cases}y^2=4x\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴一周.

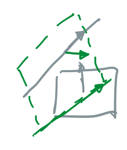
$r^2=y^2+z^2$, $y^2+z^2=4x$

曲线 $\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴一周.

$r^2=x^2+z^2$, $4x^2+4z^2+9y^2=36.$

求直线 L: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 Π: $x-y+2z-1=0$ 上投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所得方程.

平面法向量 $\vec{n}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$



过 L 且与 Π 垂直的平面的法向量 $\vec{n}'=\vec{n}\times\vec{v}=(1,-3,-2)$.

投影直线 L_0 法向量 $\vec{v}'=\vec{n}'\times\vec{n}=(-4,-2,1)$. (平面交线)

又 L 与 Π 交点 $M(2,1,0)$,

则 L_0 方程 $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$.

绕 y 轴转一周 - 个 y 值 (纬圆) 处

$P(x,y,z)$, $P_0(2y,y,\frac{1-y}{2})$.

$\therefore x^2+y^2+z^2=(2y)^2+y^2+(\frac{1-y}{2})^2$.

$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

设曲线 (准线) C: $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

C 过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

转轴 l 方向向量 $\vec{v}=(l,m,n)$,

则对旋转面上的任意 $M(x,y,z)$

$\begin{cases}F(x_0,y_0,z_0)=0\\G(x_0,y_0,z_0)=0\\|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}|=|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{v}|\ (\text{距离等}).\\l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0\end{cases}$

(3) 求 Oyz 平面上直线 $y-2z+1=0$ 绕直线 $y=z$ 旋转所得曲面.

S1 $y=z$ 法向量 $\vec{v}=(0,1,1)$

法平面 $y+z-t=0$

法平面与 $y-2z+1=0$ 交于 $(0,\frac{2t-1}{3},\frac{t+1}{3})$.

$\therefore|\overrightarrow{OP_0}\times\vec{v}|=|\overrightarrow{OP}\times\vec{v}|$,

$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\0&\frac{2t-1}{3}&\frac{t+1}{3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\x&y&z\end{vmatrix}$

$|(\frac{-t+2}{3},0,0)|=|(z-y,x,-x)|$.

$\frac{1}{9}(t^2-4t+4)=y^2+z^2-2zy+2x^2$

$y^2+z^2+2yz-4y-4z+4=9y^2+9z^2-18zy+18x^2$

$18x^2+8y^2+8z^2-20zy+4y+4z-4=0$

$9x^2+4y^2+4z-10zy+2y+2z-2=0.$

S2 $P(x,y,z)$ 由 $Q(0,t,\frac{1}{2}t-\frac{1}{2})$ 得 $y=2z-1$ $\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

$\vec{v}=(0,1,1)$. $O(0,0,0)$

$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\perp l\\|OP|=|OQ|\end{cases}$ $y-t+z-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=0$

$y+z-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}t$. $t=\frac{1}{3}(2y+2z-1)$

$\Rightarrow\begin{cases}(x,y-t,z-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2})\cdot(0,1,1)=0\\x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+t^2.\end{cases}$

$x^2+y^2+z^2=\frac{5}{4}\times\frac{1}{9}(2y+2z-1)^2-\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{3}(2y+2z-1)+\frac{1}{4}$

$=\frac{5}{36}(4y^2+4z^2+1-4y-4z+8yz)$

$-\frac{1}{6}(2y+2z-1)+\frac{1}{4}$

$36x^2+36y^2+36z^2=20y^2+20z^2+5-20y-20z+40yz$

$-12y-12z+6+9$

$36x^2+16y^2+16z^2-40yz-32y-32z-20=0$

$9x^2+4y^2+4z^2-10yz-8y-8y-5=0$

求 L_1: $\begin{cases}x+y=0\\2x-z-1=0\end{cases}$ 绕 L_2: $x=-y=\frac{z-1}{2}$ 旋转所得曲面方程.

S1 $\begin{cases}x_0+y_0=0\\2x_0-z_0-1=0\\|(x,y,z-1)\times(1,-1,2)|=|(x_0,y_0,z_0-1)\times(1,-1,2)|\\1\times(x-x_0)-(y-y_0)+2(z-z_0)=0\end{cases}$ $\overrightarrow{MM_1}=(x,y,z-1)$

$\begin{vmatrix}i&j&k\\x&y&z-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=|(2y+z-1,z-1-2x,-x-y)|$

$=5y^2+5x^2+2z^2+4yz-4xz+2xy$

$-4z+4x-4y+2$

$x-y+2z=x_0-y_0+2z_0$

$=x_0+x_0+4x_0-2=6x_0-2.$

$5y^2+5x^2+2z^2+4yz-4xz+2xy-4z+4x-4y+2$

$=5x_0^2+5x_0^2+2(2x_0-1)^2-4x_0(2x_0-1)-4x_0(2x_0-1)$

$-4(2x_0-1)+4x_0+4x_0+2$

$=\cancel{2x_0^2+6x_0}+8$ ⇒ 寄吗?

~~$=2(\frac{x-y+2z+2}{6})^2+6\frac{x-y+2z+2}{6}$~~ $+8$

$=\frac{1}{18}(x^2+y^2+4z^2+4-2xy-4zy+4xz+4x-4y+8z+4)$

$+\frac{8}{3}(x-y+2z+2)+8$

S2. L_2: $x=-y=\frac{z-1}{2}$ 法向量 $(1,-1,2)$. 过 $M(0,0,1)$

法平面 $x-y+2z+t=0$. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

与 L_1: $\frac{x}{1}=\frac{-y}{1}=\frac{z+1}{2}$ 交, $y=-x$. $z=2x-1$

$x+x+4x-2+t=0$, $6x-2+t=0$,

$x=\frac{2-t}{6}$, $y=\frac{t-2}{6}$, $z=\frac{2-t}{3}-1=\frac{2-t-3}{3}=\frac{-t-1}{3}$

$\frac{2-t+3}{6}$ $\frac{t-2-3}{6}$ $\frac{-2t-2}{6}$

$|\overrightarrow{MP_0}\times\vec{v}|=|\overrightarrow{MP}\times\vec{v}|$

$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\\frac{2-t}{6}&\frac{t-2}{6}&\frac{-t-1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\2-t&t-2&-2t-2\end{vmatrix}$ $\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\5-t&t-5&-2t-2\end{vmatrix}$

$2t+2-2t+10=12$

$10-2t+2t+2=12.$

$=\frac{1}{6}|(12,12,0)|=\frac{288}{36}=8$

$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\x&y&z-1\end{vmatrix}=(-z+1-2y,2x-z+1,y+x)$

$z^2+4y^2+4yz-2z-4y+1+4x^2+z^2+1-2xz-2z+4x$

$+x^2+y^2+2xy=8$

$2z^2+5y^2+5x^2+4yz+2xy-2xz-4z-4y+4x+2=8$

$5x^2+5y^2+2z^2+2xy-2xz+4yz+4x-4y-4z-6=0$

2. 柱面. 锥面.

(1) 建立通过曲线 L: $\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1\\x^2=y^2+z^2\end{cases}$ 且母线平行于 z 轴的柱面方程.

平行 z 轴 ⇒ 作 Oxy 面投影.

联立得 $x^2+y^2+4(x^2-y^2)=1$, 即 $5x^2-3y^2=1$.

(2) 求准线为 $\begin{cases}y^2+z^2=1\\x=1\end{cases}$, 母线方向 $(2,1,1)$ 的柱面一般方程.

准线上任取 (x_0,y_0,z_0)

则该母线方向 $\begin{cases}x=x_0+2t\\y=y_0+t\\z=z_0+t\end{cases}$

又 $\begin{cases}y_0^2+z_0^2=1\\x_0=1\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}(y-t)^2+(z-t)^2=1\\x-2t=1\end{cases}$ $2t=x-1$.

$y^2+z^2-2yt-2zt+2t^2=1$

$y^2+z^2-(y+z)(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}=1$

$x^2-2x+1+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2y+2z-2=0$

$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-1=0$

(3) 求 $\begin{cases}y^2+z^2=1\\x=1\end{cases}$, 顶点 $(2,1,1)$ 锥面方程.

准线上任取 (x_0,y_0,z_0) $\begin{cases}y_0^2+z_0^2=1\\x_0=1\end{cases}$

母线 $\begin{cases}\frac{x-2}{x_0-2}=t\\\frac{y-1}{y_0-1}=t\\\frac{z-1}{z_0-1}=t\end{cases}$ $(x-2)=t(x_0-2)$ $(y-1)=t(y_0-1)$ $(z-1)=t(z_0-1)$

$\therefore\begin{cases}(\frac{y-1}{t}+1)^2+(\frac{z-1}{t}+1)^2=1\\\frac{x-2}{t}+2=1\end{cases}$ $t=2-x$ $\frac{x-2}{t}=-1$, $x=2-t$.

$(y-1+t)^2+(z-1+t)^2=t^2$

$y^2+2(t-1)y+(t-1)^2+z^2+2(t-1)z+(t-1)^2=t^2$

$y^2+2(1-x)y+2(1-x)z+2(1-x)^2=(2-x)^2$

$2(x^2-2x+1)$ x^2-4x+4

$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2y+2z=0$