课后题

2022年2月21日 星期一 上午7:16

习题 8.1

1. (1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{OB}$.

$k\vec{a}+k\vec{b}=\vec{OA'}+\vec{A'B'}=\vec{OB'}$.

当 O.B.B' 共线时，

有 $\triangle OAB\sim\triangle OA'B'$, $\vec{OB'}=k\vec{OB}$, 命题得证.

下证 O.B.B' 共线. 假设 B 不在 OB' 上.

过 B 作 BM // AA', 交 A'B' 于 M

则 □ABMA' 为平行四边形.

$AB=A'M$, $A'B'=kA'M$

延长 MB 交 OB' 于 B_1, 则有 $\frac{OB_1}{OB'}=\frac{A'M}{A'B'}=\frac{1}{k}$,

延长 AB_2 交 OB' 于 B_2, 则有 $\frac{OB_2}{OB'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{1}{k}$.

且因为 B 不在 OB' 上, B_1. B_2 不重合.

则与 $OB'=kOB_1=kOB_2$ 矛盾. ∴假设不成立.

∴O.B.B' 共线, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

(2) 首先 $(k+l)\vec{a}$ 与 $k\vec{a}$. $l\vec{a}$ 共线, 即与 $k\vec{a}+l\vec{a}$ 共线.

$(k+l)\vec{a}=\vec{OA_2}$. $k\vec{a}+l\vec{a}=\vec{OA_1}$. $\vec{OA_1}$ 与 $\vec{OA_2}$ 同向共线.

当 k.l 同正负时,

$|\vec{OA_2}|=|k+l||\vec{a}|$ $|\vec{OA_1}|=|k||\vec{a}|+|l||\vec{a}|$

同时又有 $|k+l|=|k|+|l|$.

∴ $|\vec{OA_2}|=|\vec{OA_1}|$. ∴ $\vec{OA_2}=\vec{OA_1}$.

当 k. l 异号时, $|\vec{OA_2}|=|k-l||\vec{a}|$, $|\vec{OA_1}|=||k||\vec{a}|-|l||\vec{a}||$

同时又有 $|k-l|=||k|-|l||$.

∴ $|\vec{OA_1}|=|\vec{OA_2}|$, $\vec{OA_2}=\vec{OA_1}$.

建系

(3) ..

2. (1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta(\vec{a},\vec{b})$

$|(k\vec{a})\times\vec{b}|=|k\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta(\vec{a},\vec{b})=k|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta(\vec{a},\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$

$=|\vec{a}||k\vec{b}|\sin\theta(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a})\times(k\vec{b})$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$ $\vec{a}$ 向 $\vec{b}$ 旋转. 设为顺时针.

则 $\vec{b}$ 向 $\vec{a}$ 旋转为逆时针.

∴夹角 $\sin\theta(\vec{a},\vec{b})=-\sin\theta(\vec{b},\vec{a})$.

∴ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

3. $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$, 当且仅当 $\vec{a}=k\vec{b}$ 取等.

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{OA}+\vec{AB}|=|\vec{OB}|\le|\vec{OA}|+|\vec{AB}|$.

$\vec{a}=k\vec{b}$ 时, O.A.B 共线,

$|\vec{OB}|=|(k+1)\vec{a}|$. $|\vec{OA}|+|\vec{AB}|=|\vec{OB}|$.

习题 8.2

1. (1) x.y.z 轴截距相等.

(2) 平行于 z 轴.

(3) 平行于 x 轴.

(4) 平行于 yz 平面.

2. $ax+by+cz=0$. $\vec{n}=(a,b,c)$. ⊥ (3,-1,4)

$$\begin{cases}3a-b+4c=0\\2a-7b+4c=0\\3a+4+2c=0\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}6a+6c=0,\ a=-c\\2b-2c=0,\ b=c\end{matrix}$$

∴ $-cx+cy+cz=0$

$c\neq0$, $-x+y+z=0$

3. $ax+ay+cz=1$.

$5a-7a+4a=1$, $a=\frac{1}{2}$.

$x+y+z-2=0$.

4. (1) 平行.

(2) 相交.

(3) 重合.

(4) 垂直.

5. $ax+by+cz+d=0$.

$\vec{n}=(a,b,c)$. $\vec{n_1}=(2,0,-1)$. $\vec{n_2}=(0,1,0)$.

$$\begin{cases}2a-c=0 & c=2a\\b=0\\3a-b+c+d=0\end{cases}\Rightarrow 3a+c+d=5a+d=0.$$

$a=1$. $d=-5$. $c=2$. $x+2z-5=0$.

6. $x-5=0$

7. (1) $\vec{n_1}=(2,-1,1)$. $\vec{n_2}=(1,-1,2)$.

$\cos\theta=\frac{2+1+2}{\sqrt{4+2}\sqrt{4+2}}=\frac{5}{6}$.

(2) $\vec{n_1}=(4,2,4)$ $\vec{n_2}=(3,-4,0)$

习题 8.3

1. (1) 椭球 (5) 双叶双曲面.

(2) 球 (6) 双叶双曲面

(3) 椭球 (7) 椭圆抛物面

(4) 单叶双曲面. (8) 双曲抛物面.

2. (1) 直线. 平面. (2) 直线. 平面

(3) 圆. 圆柱. (4) 双曲面. 双曲柱面

(5) 抛物线. 抛物柱面. (6) 点. 直线.

(7) 两个点. 两条直线. (8) 两个点. 两条直线.

3. (1) $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$. 单叶双曲面.

$y^2-\frac{z^2}{4}=1$ 绕 z. $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$.

(2) $y=5x$ 绕 x.

$\sqrt{y^2+z^2}=5x$ —?

(3) $4x^2+4z^2+9y^2=36$. 椭球面.

4. P在过该点并与 z-y 垂直的圆上.

圆心在 z-y=0, 半径为 d_{p-l}.

P是直线上的点 $y-2z+1=0$.

$x=0$, $\frac{y+1}{2}=z$. $(0,2t-1,t)$

$\vec{v}=(0,-1,1)$

$d=\frac{-2t+1-t}{\sqrt{2}}=\frac{-t+1}{\sqrt{2}}=r$.

进行一个旋转+平移

$y-2z+1=0$, $z-y=0$. ⇒ $-z+1=0$. $\begin{matrix}z=1\\y=1\end{matrix}$

习题 8.4

1. $(x-1)^2-(y-1)^2-(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

将原点平移至 $(1,1,\frac{1}{2})$. 双叶双曲面

$x'^2-y'^2-z'^2=\frac{3}{4}$

2. $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\z=z'\end{cases}$

双曲抛物面.

3. 单叶双曲

4. (1) 柱: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

球: $x=r\cos\varphi\cos\theta$, $y=r\cos\varphi\sin\theta$, $z=r\sin\varphi$

综合

1.~6. 略.

7. 圆心 (1,0,0). $\frac{x-1}{2}=y=z$.

$r=1$. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $\vec{P_0P_1}=(x_0-1,y_0,z_0)$

$d=\frac{|(2,1,1)\times(x_0-1,y_0,z_0)|}{\sqrt{4+1+1}}=1$.

$5z^2+5y^2+2x^2-4xy-2zy-4xz-4x+4y+4z=3$.

8. 顶点 (2,1,1)

准线上 (x_1,y_1,z_1)

母线 $\frac{x-2}{x_1-2}=\frac{y-1}{y_1-1}=\frac{z-1}{z_1-1}$

$x_1=1$. $y_1^2+z_1^2=1$.

$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+4x+2y+2z-2=0$

9. $\vec{v}=(1,1,1)$. $P(1,0,0)$ 母线