数项级数

2021年12月20日 星期一　　上午9:43

一、定义

称 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的第n个部分和。如果部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 S，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛到 S，并记 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$.

二、性质定理

1. Cauchy 收敛准则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的

$\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in N^+$ 使得当 $n>N_\varepsilon$ 时，不等式 $|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N^+$ 恒成立。

2. 级数收敛 $\Rightarrow$ 通项 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n-S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$

必要条件，不是充分条件。

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n]$，但 $\ln(n+1)$ 发散。

3. 收敛级数的线性性。

$\sum_{n=1}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1\sum_{n=1}^{\infty}a_n+c_2\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$

4. 增、减、改变有限项不影响级数的敛散性（但收敛时影响和值）。

例. 等比级数（几何级数）

$1+q+q^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ 是收敛的

$\Leftrightarrow |q|<1$，且 $|q|<1$ 时和为 $\frac{1}{1-q}$.

证明：$|q|\geq1$，发散。

$|q|<1$，$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}\to\frac{1}{1-q}$.

例. p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛 $\Leftrightarrow p>1$.

证明：$p\leq0$，显然发散。

$p>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛 $\overset{\text{Cauchy积分}}{\Leftrightarrow}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛

$\Leftrightarrow p>1$（上一章已证）

三、正项级数收敛性的判别法。

1. 有界性判别法。

正向数列收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列有界。

$a_n\geq0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的

$\Leftrightarrow\exists$ 常数 $M>0$，对 $\forall N$，都有 $S_n<M$.

正向，部分和单调递增，~~有~~界，收敛。

2. 比较判别法（原始形式）。

若从某项起有 $0\leq a_n\leq b_n$，那么

① $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

② $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。

1) $\Rightarrow$ 2) $a_n\leq b_n$，$\therefore A_n\leq B_n$. 按有界性。

3. 比较判别法（极限形式）。

若 $a_n\geq0$，$b_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$ 是一个有限正数，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散。

证明：$\frac{A}{2}<A<\frac{3}{2}A$.

对足够大的 n，$\frac{A}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}A$.

$\therefore\frac{A}{2}b_n<a_n<\frac{3A}{2}b_n$

b_n 发散，a_n 发散　b_n 收敛，a_n 收敛。

$\Rightarrow A=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

$A=+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

4. Cauchy 根值判别法。（对 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$）

① 若从某项起有 $\sqrt[n]{a_n}\leq\underset{\text{必须有常数 }q\in[0,1)}{q}<1$，则收敛。

② 若有无穷多个 n 使 $\sqrt[n]{a_n}\geq1$，则发散。

证明：$0\leq\sqrt[n]{a_n}<q<1\Leftrightarrow0\leq a_n<q^n<1$.

$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$ 收敛，则 a_n 收敛。

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$，$q<1$ 时收敛，$q>1$ 时发散，$q=1$ 时无法判断。

* $\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}\to1$，但 $\frac{1}{n^p}$ 要按 p.（$\sqrt[n]{a_n}$ 与 a_n）

5. D'Alembert 判别法

① 若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$，则收敛。

② 若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1$，则发散。

$\Rightarrow$ 若前后项之比有极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，

$q<1$ 时收敛，$q>1$ 时发散，$q=1$ 不定。

* 能用 D'Alembert 的都能用 Cauchy。

但如 $a_n=(5+(-1)^n4)(\frac{1}{2})^n$，能用 Cauchy 不能用 D'Alembert.

6. Cauchy 积分判别法。

如果 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 非负单减，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散。

例. 讨论下述正向级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$.

(1) $a_n=\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$，$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n\to\frac{e}{3}<1$.

若改为 $\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$，$\sqrt[n]{a_n}\to\frac{e}{2}>1$.

(2) $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)x(\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}\longrightarrow\frac{x}{e}$.

$x<e$，收敛。$x>e$，发散。

$x=e$，$a_n=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k=\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n$.

$a_n=n!(\frac{e}{n})^n>(\frac{n+1}{e})^n=(1+\frac{1}{n})^n\geq2$.

不趋于零，故发散。

例. 讨论下述正向级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^\alpha}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^5+1}}$　(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^\alpha}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}=1$. 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 同敛散。

(2) $a_n=\frac{3n+2}{\sqrt{n^5+1}}\sim\frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$. 同收敛。

(3) $\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{2}$ 与 1 之间取 $\frac{2}{3}$. 记 $c_n=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^\alpha}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}=\frac{n^{\frac{1}{6}}}{(\ln n)^\alpha}=\infty$.

* $\lim_{x\to0^+}x^\alpha|\ln x|^\beta=0$，$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha|\ln x|^\beta=+\infty$.

$(\alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R})$

7. 比较判别法的比值形式。

若从某项起恒有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$，则有

若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

证明：不妨设从 $n=1$ 起 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$，

则有 $\frac{a_n}{b_n}\leq\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leq\cdots\leq\frac{a_1}{b_1}=l$（有界）.

即对 $\forall n$ 都有 $a_n\leq lb_n$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=1}^{\infty}lb_n=l\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，收敛。

8. Raabe 判别法

设 $a_n>0$. 若从某项起恒有 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\geq\alpha_0>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。若从某项起恒有 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\leq1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\alpha$，$\alpha>1$ 收敛，$\alpha<1$ 发散。

证明：$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\leq1\Leftrightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq\frac{1}{n}+1=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

$\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$. 根据比值形式，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 发散。

$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\geq\alpha_0>1$，则 $\exists\alpha$ 满足 $\alpha_0>\alpha>1$.

令 $b_n=\frac{1}{n^\alpha}$（准备作比较）. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

则有 $n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)=n(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}-1)$

$=n((1+\frac{1}{n})^\alpha-1)\sim n\times\alpha\times\frac{1}{n}=\alpha$.

即 $\lim_{n\to\infty}n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)=\alpha$.

$\alpha<\alpha_0$，则 $\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，$n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)<\alpha_0$.

又 $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\geq\alpha_0$.

$\therefore n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

又 $\because\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

$\text{Cauchy}\ \begin{cases}\to\text{Weierstrass}\\\to\text{Dirichlet}\to\text{Leibniz}.\\\to\text{Abel}\end{cases}$

四、一般交错数列的敛散性。

1. Cauchy 收敛准则。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的

$\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in N^+$ 使得当 $n>N_\varepsilon$ 时，不等式 $|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N^+$ 恒成立。

2. Leibniz 判别法。

$\{a_n\}$ 单调趋近于零（正/负），则称 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 为 Leibniz 级数，该级数总收敛，且其和 S_n 介于 0 和 a_1 之间。

注：若 a_n 非负且单调递减，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的部分和 $S_n=a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n$ 满足：

对 $\forall n\in N^+$，有 $0\leq S_{2n}\leq S_{2n+2}\leq S_{2n+1}\leq S_{2n-1}\leq a_1$.

$\{S_{2n}\}$ 单增有上界 a_1.

$\{S_{2n-1}\}$ 单减有下界 0.

又 $S_{2n}=S_{2n-1}-a_{2n-1}$，$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S-0=S$.

即部分和 S_n 收敛至 S

3. Weierstrass 控制收敛判别法。

若从某项起恒有 $|a_n|\leq b_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则可得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

证明：$|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|$

$\leq|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|$

$\leq b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}$ 收敛。

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3\sin n}{n^\alpha}$　$(\alpha>1)$.

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3\sin n}{n^\alpha}\right|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^\alpha}$ 收敛。

*4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛。（绝对）

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，称条件收敛。

例. 条件收敛例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则任意改变求和顺序后所得的新级数仍收敛，且其和不变。（无限上的交换律）.

"任意改变求和顺序"：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$.

证明：$a_n\to a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}$

$a_n\to a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}$　$\Rightarrow a_n=a_n^+-a_n^-$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则适当改变求和顺序后所得的新级数可以收敛于给定的任意实数 $/+\infty/-\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 条件收敛。

反证法：假设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛

$|a_n|=|(a_n+b_n)-b_n|$

$\leq|a_n+b_n|+|b_n|\to$ 绝对.

存在矛盾.

5. Dirichlet 判别法.（精细）

若有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界，且 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调趋于零，则乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

6. Abel 判别法.（精细）.

若有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调有界，则乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

证 5.6：引理 Abel 分部求和及其估算.

记 $A_k=a_1+\cdots+a_k$. $1\leq k\leq n$.

则有 (1) $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})$

证明 $=\sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k$　$(A_0=0)$.

$=A_nb_n-A_{n-1}b_n+\sum_{k=1}^{n-1}(A_k-A_{k-1})b_k$

(2) 若 $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ 单调，$|A_k|\leq L$，则有

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_kb_k\right|\leq L(|b_1|+2|b_n|)$.

证明：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq|A_nb_n|+\left|\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})\right|$

$\leq L|b_n|+L\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})$

$\leq L|b_n|+L(b_1-b_n)$

$\leq L(2|b_n|+|b_1|)$

(3) 若 $\{b_n\}_{k=1}^{n}$ 非负单调，$m\leq A_k\leq M$，

则有 $mb_1\leq\sum_{k=1}^{n}a_kb_k<Mb_1$.

记 $L_n=\sup\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\right)$.

$\therefore\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\leq L_n\times(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|)$

L_n 有界，b_n 趋于 0，$\therefore\sum_{k=n+1}^{n+p}$ 收敛。

b_n 有界 $\leq M$，$\lim_{n\to\infty}L_n=0$（收敛于0）. $\therefore\sum_{k=n+1}^{n+p}$ 收敛。

例. 讨论以下级数敛散性.　$(\alpha>0)$　$(x\neq2k\pi)$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+3})$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+c}-\sqrt{n}=0$，$\sqrt{n^2+3}\sim n$.

$a_n=\sin(n\pi+\pi(\sqrt{n^2+3}-n))$

$=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+3}-n)$

$=(-1)^n\sin\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+3}+n}$. Leibniz，收敛。

(2) $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha+kx)\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$，$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(\alpha+kx)\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$ 有界，$\frac{1}{n^\alpha}=b_n\downarrow$. Dirichlet 收敛

(3) $\frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$ 收敛. $(1+\frac{1}{n})^n$ 有界. Abel. 收敛.

例. $0<\alpha\leq1$，$x\neq k\pi$. 试证：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ 仅条件收敛。

由上例，Dirichlet，收敛。

绝对 $\left|\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right|$，有

$\left|\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right|\geq\frac{\cos^2(nx)}{n^\alpha}=\frac{1+\cos(2nx)}{2n^\alpha}$

$=\frac{1}{2n^\alpha}+\frac{\cos(2nx)}{2n^\alpha}=b_n+c_n$.

b_n 发散，c_n 收敛，乃发散。

五、级数的乘积。

1. 定义：Cauchy 乘积级数.

$(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)\to\sum_{i=1}^{\infty}a_i\times\sum_{j=1}^{\infty}b_j$.

$$\begin{matrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \end{matrix}\quad\Rightarrow\quad c_n=a_1b_n+\cdots+a_nb_1=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}.$$

2. 引理：假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，数列 $\{r_n\}$ 收敛到零，则 $\Delta_n=a_1r_n+a_2r_{n-1}+\cdots+a_nr_1$，有 $\lim_{n\to\infty}\Delta_n=0$.

证明：存在正常数 L 使 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leq L$，$|r_n|\leq L$

对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim_{n\to\infty}r_n=0$，

且余和 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|=0$　（$n\to+\infty$，部分和 $S_n\to$ 总和 S，余和 $S-S_n\to0$.）

$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$|r_n|<\frac{\varepsilon}{2L}$，$\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2L}$.

$\therefore$ 当 $n>2N$ 时，$n+1-N>N$，

$|\Delta_n|\leq\sum_{k=1}^{N}|a_kr_{n+1-k}|+\sum_{k=N+1}^{n}|a_kr_{n+1-k}|$

$\leq L\times\frac{\varepsilon}{2L}+\frac{\varepsilon}{2L}\times L=\varepsilon$.

3. Mertens 定理.

假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，其和值为 A，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛到 B，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛到 AB.

证明：$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$.

$=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)$

$=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)B-a_1(B-B_n)-\cdots-a_n(B-B_1)$

$=A_nB-\Delta_n$.

其中 $\Delta_n=a_1r_n+a_2r_{n-1}+\cdots+a_nr_1$.

$r_n=B-B_n$（全和 − 部分和），$\lim_{n\to\infty}r_n=0$.

$\therefore\lim_{n\to\infty}\Delta_n=0$，$\therefore\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}A_nB-\Delta_n=AB$.