函数项级数

2021年12月24日 星期五　　上午11:11

一、逐点收敛

1. 概念

① 函数项级数：无穷多个函数 $u_1(x), u_2(x) \cdots$ 定义在相同定义域上，相加得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

② 收敛/发散点：$x_0 \in E$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 为数项级数.
收敛域：全体收敛点形成的子集E.

③ 函数列的极限函数：对不同 $x \in E$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于不同值，记该值为 $f(x)$，也即该函数列的极限函数，$x \in E$.

例. 幂函数列 x^n，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

通项在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义.

$S_n = 1 + x + \cdots + x^n = \begin{cases} n+1, & x=1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1 \end{cases}$

$x=1$，$S_n \to +\infty$.

$|x|>1$，$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \infty$

$|x|<1$，$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}$

在 $(-1,1)$ 上收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

2. 性质

例. $x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) + \cdots$

$S_n(x) = x + x(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1)$
$= x + x^2 - x + x^3 - x^2 + \cdots + x^n - x^{n-1} = x^n$.

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} \infty & |x|>1 \\ 1 & x=1 \\ 无 & x=-1 \\ 0 & |x|<1 \end{cases}$

$\therefore S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & -1<x<1 \end{cases}$

例. $S_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in 无理数 \\ 1 & x \in 有理数 \end{cases}$

无理，$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$（0相加）

有理，$\lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{r_1 + \cdots + r_k}_{0} + \underbrace{r_{k+1} + \cdots + r_n}_{1}$

例. 记 $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$.
$S_n = u_1(x) + \cdots + u_n(x) = f_n(x)$
$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx$　　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx$
$\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int u_n(x)dx$

函数求和后连续性改变.
根本原因：各点收敛情况不同.

二、一致收敛

1. 定义

对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon \in N^*$ 使当 $n>N_\varepsilon$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对所有 $x\in I$ 都成立.
对 $x\in I$，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^*$，当 $n>N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 恒成立.

$\Rightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in N^*$，使当 $n>N_\varepsilon$ 时，$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ 对所有 $x\in I$ 都成立.

例. (1) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ $(n\in N^*)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛于0.
(2) $g_n(x)=x^n$ 在 $[0,1)$ 中逐点收敛于0，但不是一致收敛的.

(1) $f_n(x) = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}$.（$x\in[0,+\infty)$ 成立.）
但区间改为 $R\setminus\{?\}$，不一致收敛.

(2) 取 $x=\frac{n}{n+1}$，有 $g_n(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 单减 $\to \frac{1}{e}$.
则取 $\varepsilon=\frac{1}{e}$，则对 $\forall N$，当 $n>N$ 时，$|g_n(x)-0|>\frac{1}{e}$.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\beta_n=0$，其中 $\beta_n=\sup|f_n(x)-f(x)|$.

证明：一致收敛，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，对所有 $x\in I$，$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.
$\therefore \sup|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，$\beta_n<\varepsilon$.

例. $f_n(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛但不一致收敛.

$f_n(x)=x^n$ 收敛至 $f(x)=\begin{cases}1, & x=1 \\ 0, & x\in[0,1)\end{cases}$
则 $\sup|f_n(x)-f(x)|=1\neq 0$.

$f_n(x)=x^n$ 在 $[0,\delta]$ 上收敛，$\delta<1$.
$\sup|f_n(x)-f(x)| = \sup|x^n-0| = \sup x^n = \delta^n \to 0$

例. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.
$\sup|f_n(x)-f(x)| = \sup\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n}\to 0$.

例. $f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$ 在 $[0,1]$ 的一致收敛性.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}=0=f(x)$
$\therefore \sup|f_n(x)-f(x)| = \sup\left|\frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}\right|$
取 $x=\frac{1}{n}$，$f_n(x)=\frac{2n}{e}$. $\beta_n\geq\frac{2n}{e}$.
$\therefore \lim_{n\to\infty}\beta_n\neq 0$，$\therefore f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛.
取 $\delta\in[0,1]$，对 $x\in[\delta,1]$，
$f_n'(x)=2n^2e^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2)$，驻点 $x=\frac{1}{\sqrt{2}n}$.
当 $\frac{1}{\sqrt{2}n}<\delta$ 时，$\sup\left|\frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}\right| = \frac{2n^2\delta}{e^{n^2\delta^2}} = \beta_n$
$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$，$\therefore f_n(x)$ 一致收敛.

例. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负连续函数列，且在 $[a,b]$ 上逐点收敛至 $f(x)$，对 $\forall x\in[a,b]$，有 $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$.
证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明：不妨设 $f(x)=0$.
若 $f(x)\neq 0$，则令 $g(x)=f_n(x)-f(x)$.
假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛，
即 $\exists\varepsilon_0$，对 $\forall N_\varepsilon$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，
$\exists x_n\in[a,b]$，使 $|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x_n)|\geq\varepsilon_0$.
x_n 有界，$\therefore \{x_n\}$ 有收敛子列 x_{n_k}.
不妨设 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，$x_0\in[a,b]$.
又 $\because f_n(x)$ 对 n 单减，$f_n(x)$ 恒 ≥ 0，
有 $\varepsilon_0\leq f_{n+p}(x_{n+p})\leq f_n(x_{n+p})$，
其中 $\lim_{n+p\to\infty}f_{n+p}(x_{n+p})\leq\lim_{n+p\to\infty}f_n(x_{n+p})$
$=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)=0$.
$\varepsilon_0\leq 0$，与条件矛盾. $\therefore f(x)$ 一致收敛.

2. 定理

① Cauchy 收敛.
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，对 $\forall p$，有
$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| = |S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$，
则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.

② Weierstrass 判别.
已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$x\in I$ 时，对 $\forall n$，若从某项起恒有 $|u_n(x)|<a_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.
已知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $x\in I$ 上一致收敛，对 $\forall n$，对 $\forall n$，若有 $|u_n(x)|<a_n(x)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.
证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $x\in I$ 上一致收敛.
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，对 $\forall x\in I$，都有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)-S(x)|<\varepsilon$.
$\therefore \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)| < \sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)$

③ Dirichlet 判别.
若 $\{v_n(x)\}$ 单调且一致趋于零，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)u_n(x)$ 一致收敛.

④ Abel 判别.
若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛，$v_n(x)$ 单调且一致有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)u_n(x)$ 一致收敛.
任给 x，对 n 单调.

例. $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(-1,1)$ 不一致收敛，但在 $[-a,a]$ 上一致收敛，其中 $a<1$.
证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|x^n|<|a^n|$，$\forall x\in[-a,a]$ 恒成立.
$\therefore \{x^n\}$ 一致收敛.

例. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\sin(nx)}{n^\alpha}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4(2+3\cos(nx))}{\alpha^n}$.

(1) $\frac{1+2\sin(nx)}{n^\alpha} < \frac{3}{n^\alpha}$ 对 $n\in N^+$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 成立.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^\alpha}$ 收敛，$\therefore$ 原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

(2) $\frac{n^4(2+3\cos(nx))}{\alpha^n} < \frac{5n^4}{\alpha^n}$. 对 ..
又 $\sqrt[n]{\frac{5n^4}{\alpha^n}} = \frac{\sqrt[n]{5}\cdot(\sqrt[n]{n})^4}{\alpha} < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^4}{\alpha^n}$ 收敛.
$\therefore$ 原函数级数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

例. $\{a_n\}$ 单调趋于零，$\delta\in(0,\pi)$，试证：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ 在区间 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 中一致收敛.

证明：$\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $[0,2\pi]$ 中不一致收敛，如取 $a_n=\frac{1}{n}$，则 $x=0, 2\pi$ 不满足.$\right]$
a_n 单调趋于零，
$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leq \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$.
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 一致收敛. 已闭.

例. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个数列，若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R>0$ 处收敛，则它在区间 $[0,R]$ 中一致收敛.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. $x=R$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n$ 收敛.
$u_n(x)=a_nx^n=a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$
而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n$ 收敛.
$x\in[0,R]$，$\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 对 $\forall x$ 单调且一致有界.
$\therefore$ 原幂级数在 $[0,R]$ 一致收敛.
※ $x=-R$ 处收敛：分离 $a_n(-R)^n\left(\frac{x}{-R}\right)^n$.

3. 性质

$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \lim_{x\to x_0}S_n(x) = S_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)$.

极限&求和
① 假设通项 $u_n(x)$ 在区间I中皆是连续的，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在I中内闭一致收敛于 $S(x)$，则和函数 $S(x)$ 在I中也连续.

证明：[连续 $\Rightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$，有 $|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$.
$\Rightarrow |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|$]
对 $\forall\varepsilon>0$.
一致收敛 $\Rightarrow \exists N$，当 $n\geq N$ 时，$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$
$\exists N$，当 $n\geq N$ 时，$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
$u_n(x)$ 都连续 $\Rightarrow$ 和函数 $S_n(x)$ 一致连续.
$\Rightarrow \exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
$\therefore |S(x)-S(x_0)|$
$<|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$.

积分&求和
② 假设通项 $u_n(x)$ 在区间I中皆是连续的，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在I中内闭一致收敛于 $S(x)$，则和函数 $S(x)$ 在I中成立积分
$\int_a^bS(x)dx = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^bu_n(x)dx$.

证明：i) 先证 $\sum_{n=1}^{\infty}\int u_n(x)dx$ 收敛于 $\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx$.
证明：需证 i) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^bu_n(x)dx$ 收敛.
ii) $S(x)$ 在 $\int_a^b$ 在 $[a,b]$ 可积.
i) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，Cauchy
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，对 $\forall p$，
有 $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$
$\therefore \left|\int_a^bu_{n+1}(x)dx+\int_a^bu_{n+2}(x)+\cdots+\int_a^bu_{n+p}(x)dx\right|$
$<\int_a^b|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|dx$
$<\int_a^b\left|\frac{\varepsilon}{b-a}\right|dx=\varepsilon$.
$\therefore \int_a^bu_n(x)dx$ 在 $[a,b]$ 上收敛.
ii) 对 $\forall$ 分割T，$a\leq x_1<\cdots<x_n\leq b$.
$\left|\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i-A\right|$
$<\left|\sum_{i=1}^{n}(S(\xi_i)-S_n(\xi_i)+S_n(\xi_i))\Delta x_i-A\right|$
$=\left|\sum_{i=1}^{n}(S(\xi_i)-S_n(\xi_i))\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}S_n(\xi_i)-\int_a^bS_n(x)dx+\int_a^bS_n(x)dx-A\right|$
$\leq\left|\sum_{i=1}^{n}(S(\xi_i)-S_n(\xi_i))\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}S_n(\xi_i)-\int_a^bS_n(x)dx\right|+\left|\int_a^bS_n(x)dx-A\right|$.
$\left|\sum_{i=1}^{n}(S(\xi_i)-S_n(\xi_i))\Delta x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|S(\xi_i)-S_n(\xi_i)|\Delta x_i$
$\leq\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=(b-a)\varepsilon$.
$\left|\sum_{i=1}^{n}S_n(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^bS_n(x)dx\right|<\varepsilon$.
$\left|\int_a^bS_n(x)dx-A\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^bu_n(x)dx-A\right|<\varepsilon$.
$\therefore$ 原式收敛，$\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i$ 收敛至A，
且 $\int_a^bS_n(x)dx$ 收敛至A. $\therefore$ 等式成立.

求导&求和
③ 假设 ①通项 $u_n(x)$ 在区间I中皆是 ②级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在I中内闭逐点收敛于 $S(x)$，而 ③导数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在I中内闭一致收敛，则和函数 $S(x)$ 在I中也是 C^1 的，并成立求导式 $S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$.
（闭了不一定）

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在I中内闭一致收敛，连续函数变上限积分.
则有 $\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^bu_n'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$
即 $\int_a^bS_n'(x)dx=S(x)$.

例. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^n}{(2+3x)^n}\cos\frac{n\pi}{x^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$，$x>0$.
求函数极限 $a=\lim_{x\to 1}f(x)$，$b=\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

使用定理 $\Rightarrow$ 先验证条件.
$\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{x^2}\leq\left|\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2x^2}}\right|$ 有界. $\left\{\frac{x^n}{(2+3x)^n}\right\}$ 收敛.
$|u_n(x)|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n\times 1$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛，Weierstrass.
$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛在 $x>0$ 上.
由一致收敛函数项级数的性质，
$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1}u_n(x)$
$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cos n\pi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{5}{6}$.
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{2}$.

例. 求 $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\right)dx$.

① 易得 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛，其中常数 $a>0$.（内闭一致收敛）
Weierstrass：对 $\forall x$，$a>0$，都有 $|ne^{-nx}|<ne^{-na}$，$\sqrt[n]{ne^{-na}}=\frac{\sqrt[n]{n}}{e^{a}}<1$.（Cauchy）
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-na}$ 收敛. $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

对 $\forall\delta>0$，当 $x\in[\delta,+\infty)$ 时，
$ne^{-nx}=\frac{n}{e^{nx}}\leq\frac{n}{e^{n\delta}}$. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\delta}$ 收敛，
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛.

② 取 $\delta=\ln 2$：
$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nx}dx$
$=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\Big|_{\ln 3}^{\ln 2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}$.

例. 常数 $\alpha>2$，试证 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 是 C^1 的，且可逐项求导.

证明：① 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right|<\frac{1}{n^\alpha}$.
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.
② 且有 $\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ C^1.
③ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^{\alpha-1}}$.
$|u_n'(x)|\leq\frac{1}{n^{\alpha-1}}$，$\alpha>2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 收敛.
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.
$\therefore S_n'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right)'$.

设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，非负.
$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ 连续，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-nx}$，$x\in(0,1)$.
对 $\forall x\in(0,1)$，$\frac{1}{n}e^{-nx}=\frac{1}{ne^{nx}}$ 收敛.
$\sup\left|\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}+\cdots+\frac{1}{n+p}e^{-(n+p)x}\right|$
$\geq\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}=\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}\neq 0$.
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-nx}$ 收敛但不一致收敛.

4. 性质

① 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$，$x\in I$. 若 $u_n(x)$ 在I连续，且级数一致收敛，则 $S(x)$ 在I上连续.

证明：[证连续：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$.
$|S(x)-S(x_0)|\leq|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|$]
一致收敛：对 $\forall\varepsilon$，$\exists N$，$n>N$ 时，$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
$S_n(x)$ 连续：对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，
$|S(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 收敛但不一致收敛.
证明：$S(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.
证明：$\forall x_0\in(0,1)$，$\exists\delta>0$ 使 $0<\delta<x_0<1$，
且 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}=S(x)$ 在 $[\delta,1)$ 上一致收敛.
$\therefore S(x)$ 在 $[\delta,1)$ 上连续.
$\therefore$ 在 x_0 附近连续.
又 x_0 任意 $\in(0,1)$，$\therefore$ 连续.

推广：$u_n(x)$ 在 (a,b) 上连续且 $\lim_{x\to b^-}$ 存在有限，
$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛，
则 $\lim_{x\to b^-}S(x)$ 存在有限，且有
$\lim_{x\to b^-}S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to b^-}u_n(x)$.（端点补充定义）

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)=f(x)$，求 $\lim_{x\to 1}f(x)$.
取区间 $[0,2]$（包含 $x=1$，且要稍小）.
$\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)<\left(\frac{2}{3}\right)^n\Rightarrow$ 一致收敛.
$\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 连续，$f(x)$ 连续.
$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=\frac{?}{?}$.

② 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在I上一致收敛到 $S(x)$.
$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积，
且 $\int_a^bS(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^bu_n(x)dx$.

证明：① 先证 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^bu_n(x)dx$ 收敛：用 Cauchy.
$\left|\int_a^bu_{n+1}(x)dx+\cdots+\int_a^bu_{n+p}(x)dx\right|$
$=\left|\int_a^b(u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x))dx\right|$
$\leq\int_a^b|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|dx$
一致收敛，$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=0$，$u_n(x)<\varepsilon$.
$<\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$　$\therefore$ 收敛于A
② 再证 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积：定义
对 $\forall$ T 分割，$a=x_0<\cdots<x_n<b$
$\left|\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i-A\right|$
$=\left|\sum_{i=1}^{n}(S(\xi_i)-S_n(\xi_i)+S_n(\xi_i))\Delta x_i-A\right|$
$\leq\left|\sum_{i=1}^{n}(S(\xi_i)-S_n(\xi_i))\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}S_n(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^bS_n(x)dx\right|$
$+\left|\int_a^bS_n(x)dx-A\right|$
1. $\sum_{i=1}^{n}|(S(\xi_i)-S_n(\xi_i))\Delta x_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|S(\xi_i)-S_n(\xi_i)|\Delta x_i$
$\leq\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon(b-a)$.
2. $\sum_{i=1}^{n}S_n(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^bS_n(x)dx$ 可积.（$u_n(x)$ 可积）
$\exists\delta$，当 $|T|<\delta$ 时，原式 $<\varepsilon$
3. $\int_a^bS_n(x)dx=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_a^bu_k(x)dx-A\right|<\varepsilon$.（收敛）

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$x\in[0,1)$.
$\frac{x^n}{n}=\int_0^xt^{n-1}dt$.
$\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}$ 在 $t\in[0,x]$，$(x<1)$ 上有 $|t^{n-1}|\leq x^{n-1}$.
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$ 在 $t\in[0,x]$ 一致收敛.
$\therefore \int_0^x\frac{dt}{1-t}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^xt^{n-1}dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
$=-\ln(1-x)$.

③ 设 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上 [illegible]