# 幂级数与taylor展式

2021年12月27日 星期一 下午8:16

## 一、定义.

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

## 二、定理.

### 1. Abel 引理.

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则级数在开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内处处绝对收敛；

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处发散，则级数在 $|x|>|x_0|$ 区间上发散.

证明：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

$\therefore \exists M>0$，使 $|a_n x_0^n| \le M$.

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

$|x|<|x_0|$，$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$，$\therefore M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛.

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.

### 2. 收敛半径的计算.

若有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{L}$.

证明：对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = L|x|$.

$L|x|<1$，$|x|<\frac{1}{L}$，收敛.

$L|x|>1$，$|x|>\frac{1}{L}$，发散.

"$x=0$"，$R=0 \to$ 收敛区间，域缩至0.
"$x\in(-\infty,+\infty)$"，$R=+\infty$
$R=\sup\{|t| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=t$ 处收敛$\}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$

S1. 可理解为 $a_{n^2}=\frac{1}{2^n}$，即只有 $n^2$ 项的系数为 $\frac{1}{2^n}$，其他为0.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2} = \begin{cases}\infty, & |x|>1 \\ 0, & |x|<1\end{cases}$

$\therefore$ 收敛半径 $R=1$.（绝对）.

收敛区间 $(-1,1)$.

收敛域 $[-1,1]$.（验证端点）.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$a_{2n}=0$，$a_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)!} \to$ 不存在.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x-2)^2}{(2n+1)(2n)} = 0 < 1$.

$\therefore$ 收敛半径 $R=+\infty$，$(-\infty,+\infty)$.

* 区分收敛半径 & 收敛区域.

例. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

例. $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha x^n$.

区域 → 讨论.
半径 → 对称

$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = (1+\frac{1}{n})^\alpha$. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^\alpha = 1$.

$R=1$，在 $(-1,1)$ 上绝对收敛.

当 $\alpha=0$，$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $I=(-1,1)$ 上收敛.

当 $\alpha=-1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=1$，发散. $x=-1$. 收敛.

$\therefore$ 在 $I=[-1,1)$ 上收敛.

当 $\alpha=-2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $I=[-1,1]$ 收敛.

## 三、性质.

0. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $I=(-R,R)$，和函数为 $S(x)$，则有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $I$ 的内闭区间内一致收敛.

1. $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 右端点收敛，则 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. $\lim_{x\to R^-}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

2. $S(x)$ 在 $I$ 内可逐项求导，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

3. $S(x)$ 逐项可积. $\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\right)$.

$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

$\Rightarrow$ 收敛半径、区域保持不变.

例. 分别求 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

收敛半径 $R=1$，收敛区间 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，（先在内部计算，收敛性好）.

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$

$= x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$

其收敛域为 $(-1,1)$.（等式成立范围）

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt = \int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\,dt$

$= \int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)$.

其收敛域为 $[-1,1)$.

* 令 $x=-1$，$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{n}(-1)^{n-1}$.

条件收敛，交换求和会变.

* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$，级数在 $x=-1$ 收敛，则 $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，在 $x=-1$ 处右连续.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\times\frac{1}{n3^n}$

$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{3^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{1}{n}$. 化成一般形式

由上知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$，令 $x=-\frac{1}{3}$. 一般问题取特值.

得原式 $=\ln\frac{4}{3}$.

## 四、幂级数的运算.

多项式计算方式. 合并同类.

在公共收敛区间上可以计算.

思考：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 为 $R_1$. $R_2$，且 $R_1 < R_2$，

证明 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 收敛半径为 $R_1$.

（取等，可能为 $a_n=-b_n$，和为 $\to\infty$）.

## 四、Taylor 级数

1. 引入：Taylor 展开 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n$.
$f(x)$ 有无穷阶导，$\lim_{n\to\infty}R_n=0$，
则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

2. 定义：对在 $x_0$ 有任意阶微商的函数 $f(x)$，总能构造幂级数
$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$（Taylor 级数）.
$x_0=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ Maclaurin 级数.

3. 判别收敛定理：

① 设 $f(x)$ 在 $(x_0-R, x_0+R)$ 上有任意阶微商，则 $f(x)$ 在 $(x_0-R, x_0+R)$ 上可以展成 Taylor 级数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x\in(x_0-R, x_0+R)$ 都有 $\lim_{n\to\infty}R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$.

② 对 $\forall n$，$\exists M$ 使 $|f^{(n)}(x)|<M$ 对 $\forall x\in I$ 成立，则可以展成 Taylor 级数.
「$f(x)$ 在 $(x_0-R, x_0+R)$ 中 $C^\infty$，且对 $\forall r$ $(0<r<R)$，存在常数 $M_r>0$ 使得 $|f^{(k)}(x)|\le M_r$，$x\in[x_0-r, x_0+r]$.
则在 $(x_0-R, x_0+R)$ 中 $f(x)$ 的展开为幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.」

证明：对 $x\in[x_0-r, x_0+r]$ 中进行 $R_n$ 估算.

$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$ $\xi_x\in(x_0, x)$.

$\le \frac{M_r}{(n+1)!}(r^{n+1})$.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(x_0)\times\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^n - f(x)\right)$

$= -\lim_{n\to\infty}R_n(x) = 0$

内闭 $r$. $r\to R \Rightarrow$ 开区间 $R$.

例. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$ 的和函数 $S(x)$.

$(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n-1)+3n+1$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$= x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 3x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$= (x^2+3x+1)e^x$.

例. 求 $\ln(1+x)$. $\arctan x$. 的 Maclaurin 展式.

(1) 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

$\ln(1+x) = \int_0^x\frac{1}{t+1}\,dt = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,dt$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ $x\in(-1,1]$.

(2) 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$\arctan x = \int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$

$= \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t^2)^n\,dt$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$x\in[-1,1]$.

## 一、定义.

一般函数项级数的特殊情形：

$u_n(x)=a_n x^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 为幂级数.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$.

$= 1x+4x^2+9x^3+\cdots$

对 $\forall x\neq 0$，$n$ 足够大时，$n|x|>1$，不收敛.

$\therefore x=0$ 时收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ $|x|<1$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ $x\in(-\infty,+\infty)$ 收敛.

$\therefore$ 对一般的 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，

① $x=0$ 必一定收敛.

② 若在 $x=x_0\neq 0$ 处收敛，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n$ 收敛.
则对 $\forall x$. $|x|<|x_0|$. $a_n x^n = a_n x_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛.
$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 在 $(0,x_0)$ 收敛（绝对）

③ 若 $x=x_0$ 处发散，则对 $\forall|x|>|x_0|$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 发散.

④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 既有收敛点又有发散点，$\exists R$，使 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 收敛，$|x|>R$ 发散.

证明：收敛点集 $I$ 一定有界. $\therefore$ 有上确界.

记 $R=\sup I$.

则对 $\forall|x|<R$，$|x|$ 不是 $I$ 的上界.

$\therefore \exists x_0\in I$，使 $|x|<|x_0|$. $\therefore x\in I$.

若 $x>R$，则发散.

收敛区域：$x=0$.
$x\in(-R,R)\in I$.
$x\in(-\infty,+\infty)$.

## 二、收敛半径.

① $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|x = L|x|$.

$L|x|<1$，收敛. $L|x|>1$，发散.

收敛半径 $R=\frac{1}{L}$.

② $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = (\sqrt[n]{a_n})|x|$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = L|x|$

$L|x|<1$ 收敛，$L|x|>1$ 发散.

## 三、幂级数的性质.

1. $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续.

证明：$\forall x_0\in(-R,R)$，$\exists r$. $|x_0|<r<R$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 绝对收敛.

当 $|x|<r$ 时. $|a_n x^n| \le |a_n r^n|$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 一致.

$\therefore S(x)$ 在 $[-r,r]$ 上连续.

$\therefore x_0\in[-r,r]$. $S(x)$ 在 $x_0$ 连续.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=R$ 收敛，则 $S(x)$ 在 $x=R$ 左连续.

2. $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 可导. $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$

证明 [ 先求 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径
证在 $(-R', R')$ 上一致收敛 ]

对 $\forall x_0\in(-R,R)$ $\exists r$ 使 $|x_0|<r<R$.

则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n < \sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n$ 收敛.

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n r^n|$ 收敛，$|a_n r^n| \le M$.

$n a_n x_0^{n-1} = |a_n r^n|\frac{n}{r}\left(\frac{x_0}{r}\right)^{n-1} \le \frac{M}{r}n\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$

$\left|\frac{x_0}{r}\right|<1$，$\sum n\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$ 收敛.

$\therefore \sum n a_n x^{n-1}$ 在 $x_0$ 绝对收敛.

$\therefore (-R,R)\subset(-R',R')$，$R\le R'$.

$R'>R$，则 $\exists x_0$，$R'>x_0>R$.

$x_0|n a_n x_0^{n-1}| = |n a_n x_0^n| \ge |a_n x_0^n|$ $\Rightarrow$ 矛盾.
收敛 发散

$\therefore R'=R$.

$\therefore \sum n a_n x^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 的任何 $[-r,r]$ 上一致 con.

在 $[-r,r]$ 上 $\sum a_n x^n = S(x)$ 可导. $S'(x)=\sum n a_n x^{n-1}$

$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$.

3. $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 的任何闭区间上可积，且

$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx$. $[a,b]\subset(-R,R)$

当 $[0,x]\subset(-R,R)$ 时，$\int_0^x S(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x u^n\,du$

$= \sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

## 四、Taylor 展开

1. 引：$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n$，$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

设 $f(x)$ 无穷阶可导.

如果 $\lim_{n\to\infty}R_n=0$，则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

$\Rightarrow$ 若 $|f^{(n)}(x)|\le M$，则 $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

2. 重要例.

① $f(x)=e^x$.

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists r$ 使 $x<r$.

$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^r$，

幂级数在 $[-r,r]$ 上有界.

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$|x|<+\infty$ 成立.

② $f(x)=\sin x$.

$|f^{(n)}(x)| = |\sin(x+\frac{n\pi}{2})| \le 1$

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow e^{ix} = \cos x + i\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$

③ $f(x)=(1+x)^\alpha$.

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \triangleq F(x)$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \to 1$，$R=1$.

即需证在 $|x|<1$ 时 $F(x)=(1+x)^\alpha$.

$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$.

$(1+x)F'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\text{——}x^n$

$= \alpha F(x)$.

即在 $|x|<1$ 上，$(1+x)F' = \alpha F$，

$F(x) = C(1+x)^\alpha$，令 $x=0$，$C=1$.

$\therefore F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n$，$|x|<1$.

$\alpha=-1$. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. $\Rightarrow x\in(-1,1)$.

$\alpha=\frac{1}{2}$. $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+\sum(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n$.
$x\in[-1,1]$.

$\alpha=-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$. $x\in(-1,1]$

④ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. $|x|<1$.

对 $\forall|x|<1$. 由 $[0,x]$ 积分.

左 $= \int_0^x\frac{1}{1+u}\,du = \ln(1+x)$.

右 $= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x u^n\,du = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\therefore \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，$x\in(-1,1]$.

$\therefore \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

例. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

$\arctan x = \int_0^x\frac{1}{1+u^2}\,du = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x u^{2n}\,du$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.

$|x|<1$，检验得 $x\in[-1,1]$.

特别取 $x=1$. $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.

例. $f(x)=\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展开.

$= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-\frac{x}{2})^n$.

$= \sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n$. $|x|<1$.

例. $\ln x$ 在 $x=3$ 展开.

$\ln x = \ln(x-3+3) = \ln 3 + \ln(1+\frac{x-3}{3})$

$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n\times\frac{1}{n}$.

其中 $-1<\frac{x-3}{3}\le 1$.

证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\,dx$

展开.