级数的应用（例题）

2022年1月4日 星期二　　下午9:17

一、利用级数计算积分.

例. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

有 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$.

验证当 $x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ 收敛.

$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}$.

例. $\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, $k^2<1$ （椭圆积分）.

令 $u=\sin x$, $x=\arcsin u$, $dx=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$

*积分区间在级数收敛区间内.

二、解微分方程.

例. $y''-xy=0$.

设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

$xy=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$.

$\therefore\ 2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}]x^n=0$

$a_2=0$, $a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$.

三、Stirling 公式.

$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$

引理：Wallis 公式. $\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2$.

$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{n\pi}\ (n\to+\infty)$.

区间端点. $\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$

$\sim\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.