课后题

2021年12月20日 星期一 上午10:46

书本例题

1. 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$，∴ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛 S_n有界

$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$

$=2+(1-\frac12)+(\frac12-\frac13)+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac1n)$

$=3-\frac1n<3$

2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n$ 发散. 比较 → 发散.

$x>\ln(1+x)$，∴ $\frac1n>\ln(1+\frac1n)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n>\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac1n)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac1n)$

3. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

$p\le0$，发散.

$p>0$. $p=1$，由上一题得发散.

$0<p<1$，$\frac{1}{n^p}>\frac1n$ 发散

$p>1$，微分中值定理，→ 比较

$\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{\alpha}{(n-\theta)^{\alpha+1}}>\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$，$\theta\in(0,1)$.

又 $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}})=1$，∴收敛.

4. 证明 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$ $\ln n<n-1$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散 $\sum\frac{1}{\ln n}$ 发散

5. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{(n^3+1)(n^2+2)}}$ 收敛. 等价.

$\frac{n+3}{\sqrt{(n^3+1)(n^2+2)}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛.

6. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac1n)^{n^2}$ 发散. 根值.

$\sqrt[n]{a_n}=\frac12(1+\frac1n)^n$. $\lim\sqrt[n]{a_n}=\frac e2>1$，发散.

7. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac xn)^n$ 的敛散性. D'Alembert

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!(\frac{x}{n+1})^{n+1}}{n!(\frac xn)^n}=(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x=(\frac{n}{n+1})^nx$

$=\frac{x}{(1+\frac1n)^n}$，$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac xe$

8. 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac1n(\ln n)^{\alpha}$ 的敛散性.

$\alpha>1$时. $\frac{(\ln n)^{\alpha}}{n}\to\int_2^{+\infty}\frac1x\ln x\,dx$ 积分.

$\int\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}=\begin{cases}\frac{(\ln2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha>1\\ +\infty, & \alpha\le1\end{cases}$

1. $S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$

$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=2xe^{-x^2}+2\times4xe^{-4x^2}+\cdots+2n^2xe^{-n^2x^2}=0$.

3. (1) $\lim_{n\to\infty}na_n=a\ne0$，$\sum a_n$ 发散.

$\lim\frac{a_n}{\frac1n}=a$，$a_n\sim\frac an$ 发散.

(2) a_n 正、单调. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，⇒ $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

$\lim a_n=0$. $a_n>0$，∴ a_n单减

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，

对$\forall p$，有 $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

$0<2na_{2n}\le\sum_{k=n+1}^{2n}a_k<\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$

$\lim\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=0$. ∴ $\lim 2na_{2n}=0$.

(3) $\lim na_n=a$，$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛，⇒ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

$\lim\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})=\lim a_1-a_2+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$

$=\lim a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}$

$=\lim\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim na_n$

习题 7.1

1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac12(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\lim\frac12(1-\frac13+\frac13-\frac15+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\lim\frac12(1-\frac{1}{2n+1})=\frac12$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt n)$

$=\lim(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt2-1)$

$=\lim\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt2-1)$

$=1-\sqrt2+0$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln\frac{n}{n+1}+\ln\frac{2n+1}{2n-1})$

$=\lim(\ln(\frac12\times\frac23\times\cdots\times\frac{n}{n+1})+\ln(\frac31\times\frac53\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n-1}))$

$=\lim(\ln(\frac{1}{n+1})+\ln(2n+1))$

$=\lim\ln(\frac{2n+1}{n+1})=\ln2$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\lim(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(n+1)^2})=\lim(1-\frac{1}{(n+1)^2})=1$.

2. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 不趋0，发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n+1}$ 发散

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛

(4) $\sum\sin n$ 发散

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\sim2^n\frac{\pi}{3^n}\to\pi\sum\frac{2^n}{3^n}$. $\sqrt[n]{a_n}=\frac23<1$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=\sum\frac{1}{n^{1+\frac1n}}$ 收敛. $\frac1n$单减→0，而收敛.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+\frac1n)^n}$，$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2+\frac1n}<1$.

(8) $\sum\frac{n}{(n+\frac1n)^n}=\sum a_n$. $\frac{n}{(n+\frac1n)^n}<\frac{n}{n^n}$ 都是正项收敛.

$\sqrt[n]{\frac{n}{(n+\frac1n)^n}}=\frac{\sqrt[n]n}{n+\frac1n}=\frac{\sqrt[n]n}{n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$，$=n^{\frac1n-1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}<1$ 收敛.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{4n}\sim\frac{\pi}{4n}$. $\sum\frac{\pi}{4n}$ 发散.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$ → $\frac{a^n}{n!}$ 收敛

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\sum a_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)(n!)}{(2n)!}}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{n+1}{2(2n+1)}\to\frac14<1$.

$0<\frac{(n!)(n!)}{(2n)!}=\frac{n!(n!)}{(2n)!!(2n-1)!!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}$.

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$，$\frac{3+(-1)^n}{2^n}=\begin{cases}\frac{2}{2^n}&收\\ \frac{4}{2^n}&收\end{cases}$ 收敛.

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ 收敛. $\lim\frac{\ln n}{n^{1/2}}=\lim\frac{\frac1n}{\frac12n^{-1/2}}=0$. $\frac{\ln n}{n^{3/2}}<\frac{1}{n^{5/4}}$，收敛.

(14) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^k}$

$n\ln n$ 收敛 $\ln(\ln n)<\ln(n-1)<n-2$

$k=1$发散，$k>1$收敛.

(15) $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{a_n}{n+1})^n$. $\frac{a_n}{n+1}\sim a$. $a>1$，发散. $0<a<1$ 收敛. $a=1$. $(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{(1+\frac1n)^n}=\frac1e\ne0$ 发散.

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac1n)^{n^3}=\sum a_n$.

$\sqrt[n]{a_n}=(\cos\frac1n)^{n^2}<1$. → $(1-2\sin^2\frac{1}{2n})^{n^2}=e^{-\frac12}<1$.

3. $a_n=\begin{cases}2^{-\frac{n+1}{2}}=(\sqrt2)^{-(n+1)}=(\frac{\sqrt2}{2})^{n+1}&奇\\ 2^{-\frac n2}=(\sqrt2)^{-n}=(\frac{\sqrt2}{2})^n&偶\end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim 2[(\frac{\sqrt2}{2})^2+(\frac{\sqrt2}{2})^4+\cdots+(\frac{\sqrt2}{2})^{2k}]$ 偶.

$=\lim 2\times[(\frac12)+(\frac12)^2+\cdots+(\frac12)^k]$

$=2\times\frac{\frac12}{1-\frac12}=1$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$ 偶 − a_n 奇 $<\lim$ 偶. 收敛.

4. $\sum a_n$ 收敛，$\lim a_n=0$.

$\lim S_n=\lim a_1+\cdots+a_n=S$.

$\lim\tilde S_n=\lim a_1+a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}=2S$.

$\lim\tilde S_n=\lim a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=S'$.

$a_n=(-1)^nn$. $a_n>0$，$\lim S_n=\frac12S'$.

5. (1) $\lim na_n=a$. 对$\forall\varepsilon$，$\exists N$，$n>N$时，$|na_n-a|<\varepsilon$.

$a-\varepsilon<na_n<a+\varepsilon$，$\frac{a-\varepsilon}{n}<a_n<\frac{a+\varepsilon}{n}$，$a_n\sim\frac an$

∴ $\sum\frac an=a\sum\frac1n$ 发散.

(2) $\sum a_n$ 收敛，$\lim a_n=0$

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$时，$|a_n|<\varepsilon$.

$\lim a_1+a_2+\cdots+a_n=\lim S_n=S$

(3) $\lim a_1-a_2+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$

$=\lim a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}=S$.

$=\lim S_n-na_{n+1}=\lim S_{n+1}-(n+1)a_{n+1}=S-a$. 收敛

7. $\sum b_n$收敛 则 $\lim b_n=0$.

$\lim(a_{n+1}-a_n)<\lim b_n$. $\lim b_n=0$.

∴ $\lim(a_{n+1}-a_n)=0$. 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，

$a_{n+1}-a_n<b_n$. $a_2-a_1<b_1$.

⇒ $a_{n+1}-a_1<b_1+\cdots+b_n=S_n$.

$\sum b_n$收敛，$\lim S_n=S$ 存在

∴ $\lim a_{n+1}-a_1<S$ 存在. $\lim a_{n+1}<S+a_1$ 存在.

9. (1) $\lim[\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}]=\lim(S_{2n}-S_n)=0$.

$p>1$，$\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛，$\lim S_n=0$.

$\frac{n}{(2n)^p}<\cdots<\frac{n}{(n+1)^p}$. $\lim\frac{n^{1-p}}{2^p}<\cdots<\lim\frac{n^p}{(1+\frac1n)^p}$

(2)

10. $a_n>0$，$a_n\downarrow$，∴ a_n收敛. $\lim a_n=a>0$.

[$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，则 $\lim a_n\ne0$，$a\ne0$. (反证)]

假设对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使$0<a_n<\varepsilon$

则 $\lim a_n=0$，∴ $\lim(-1)^na_n=0$，S_n收敛.

使 $\sum(-1)^na_n$收敛，矛盾.

∴$\exists\varepsilon$ 使对$\forall n$，都有 $a_n>\varepsilon$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n=\sum b_n$. $\sqrt[n]{b_n}=\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{\varepsilon+1}<1$. 收敛.

12. $\sum a_n$. $\sum b_n$收敛. $a_n\to S_n$. $b_n\to T_n$.

$\sum|a_n|$. $\sum|b_n|$. 收敛.

$\lim|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=S$.

$\lim|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=T$.

$\lim|a_1+b_1|+|a_2+b_2|+\cdots+|a_n+b_n|$

$\le\lim|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+|b_1|+\cdots+|b_n|=S+T$ 收敛

11. $\sum\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ⇒ 单减趋于0. 作差.

$\lim\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim\frac{a_n}{1}=0$

$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}=\frac{(n-1)(a_1+\cdots+a_n)-n(a_1+\cdots+a_{n-1})}{n(n-1)}=\frac{na_n-(a_1+\cdots+a_n)}{n(n-1)}$

$\lim a_1+\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\cdots+\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$

$=\lim a_1(1+\frac12+\cdots+\frac1n)+a_2(\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n)+\cdots+a_n\frac1n$.

13. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2n+100}{3n+1})^n$. $(\frac{2n+100}{3n+1})^n\sim(\frac23)^n$. 绝对收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$. 对$\sum(\frac12)^{n-1}$收敛. 故绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt n}{n+100}$ 发散. $\frac{\sqrt n}{n+100}\sim\frac{n^{1/2}}{n}\sim\frac{1}{\sqrt n}$. 条件收敛. 单减.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac1n$. $\sum\sin\frac1n\sim\frac1n$发散；单减. 条件收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$. $\frac{\ln n}{n}$发散，所以条件收敛. ($f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 条件收敛.)

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. $p\le0$ 发散 ($p=0$, 极限不0). $\sum\frac{1}{n^p}$ $p>1$，绝对. $0<p\le1$，条件.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac1n}-1)$. $\sqrt[n]{e}-1<\sqrt[n]n-1$，$n\ge3$. 发散. 条件收敛. ($e^{\frac1n}-1\sim\frac1n$. 条件收敛. $e^{\frac1n}-1$单减. $\lim(e^{\frac1n}-1)=0$ 条件收敛.)

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac1n-\ln(1+\frac1n)]$. $\frac1n-\ln(1+\frac1n)=\frac1n(1-\ln(1+\frac1n)^n)$. $\frac1n$单减趋于0，$1-\ln(1+\frac1n)^n$有界. ∴$\sum(\frac1n-\ln(1+\frac1n))$ 收敛. 绝对收敛.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac an)$. $p=2k\pi$，绝对收敛. $p\ne2k\pi$，$1-\cos$有界收敛. $(-1)^n(1-\cos\frac an)$ 绝对.

(10) $1-\cos\frac1n<1$，$p>1$，绝对. $1-2\sin^2\frac{1}{2n}=\cos\frac1n$. $1-\cos\frac1n=2\sin^2\frac{1}{2n}$. $(2\sin^2\frac{1}{2n})^p<(2\sin\frac{1}{2n})^p$. $\lim(2\sin\frac{1}{2n})^p\sim\lim(2\times\frac{1}{2n})^p=\lim\frac{1}{n^p}$ ($p>1$ 绝对，$p<1$ 条件，$p<0$ 发散.)

14. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\sum\frac1n\times\sin nx$.

$x=k\pi$，$\sin nx=0$. 所以绝对收敛.

$x\ne k\pi$，$\sin nx\ne0$. $\int_1^{+\infty}\frac1t\sin kt\,dt=-\frac1k\int_1^{+\infty}\frac1t\,d\cos kt$

$=-\frac1k[\frac1t\cos kt|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\cos kt\,d\frac1t]$

$=-\frac1k(0-\cos t-\int_0^1\cos\frac kt\,dt)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}<\frac{1}{|\sin\frac{\pi}{8}|}$ 有界. $\frac{1}{\ln n}$ 单减 →0. ∴收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n<\frac{1}{|\sin\frac12|}$ 有界. $\frac{1}{\sqrt n}$单减→0.

$\sum\frac{\sin n}{\sqrt n}$ 收敛⇒有界. $(1+\frac1n)^n$ 收敛. 收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt n}$. $\frac{1}{\sqrt n}$单减. $\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt n}$ 收敛. $\frac{n-1}{n+1}$ 有界. 收敛.

15. $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$. ∴ $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}<\cdots<\frac{a_1}{b_1}$.

正项，∴$\frac{a_n}{b_n}$有界. 设 $\frac{a_n}{b_n}<l$，$a_n<lb_n$.

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum lb_n=l\sum b_n$ 收敛.

习题 7.2

2. (1) $\sum n e^{-nx}$

$S(x)=0+e^{-x}+2e^{-2x}+\cdots+ne^{-nx}$

$S=\lim e^{-x}+2e^{-2x}+\cdots+ne^{-nx}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(\frac{1-x}{1+x})^n$.

$S=\lim-\frac{1-x}{1+x}+\frac13(\frac{1-x}{1+x})^2-\frac15(\frac{1-x}{1+x})^3+\frac17(\frac{1-x}{1+x})^4\cdots$

$\frac{1}{2n-1}(\frac{1-x}{1+x})^n$ 单减

$|\frac{1-x}{1+x}|<1$. $x>0$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n-3^n}=\sum-\frac{(x-3)^n}{3^n-n}$.

$\frac{1}{3^n-n}$收敛. 单减有界.

$3^n-n>3^n-3n=3(3^{n-1}-n)$

$\frac{1}{3^n}<\frac13\times\frac{1}{3^{n-1}+3}$

$\sum(x-3)^n$. $|x-3|\in(0,1)$. $x\in(2,4)$

(7) $\frac{\cos nx}{e^{nx}}$. $\frac{\cos nx}{(e^n)^x}$ $x>0$.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$S(x)=\lim S_n=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}$

$a_n=\frac{x^n}{n}$. $\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{\sqrt[n]n}$.

$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{x}{\sqrt[n]n}$

$=\lim\frac{x}{e^{\frac1n\ln n}}\le q<1$.

$x=qe^{\frac1n\ln n}<q$.

$x\in(-1,1)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

$a_n=\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}\sim\frac{1}{x^n}\times\frac{\pi}{2^n}=\frac{\pi}{(2x)^n}$.

$2x>1$，$x>\frac12$.

$\sum\sin\frac{\pi}{2^n}$收敛至0，有界.

$x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-n}=\frac1x+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}$.

只要 $\frac1x\in(-1,1)$. $x>1$，$x<-1$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac xn)^n$. $\frac{n!}{n^n}$收敛. $\sum x^n\to x<1$.

$a_n=n!(\frac xn)^n=n!e^{n\ln\frac xn}$

$=n!(e^n)^{\ln\frac xn}$ $x\in(0,1)$.

(8) $\sum\frac{x^n}{1-x^n}=\sum\frac{1}{x^{-n}-1}=\sum\frac{1}{x^{-n}-1}$

$=-\sum\frac{-x^n}{1-x^n}=-\sum(1-\frac{1}{1-x^n})$

$=\sum\frac{1}{1-x^n}-1=\sum\frac{1}{1-x^n}$.

∴收敛. $x\in(1,+\infty)$.

3. 一致收敛：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$时，$|\sum u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

$x=1$时，$u_n(x)=\frac1n$，$\sum u_n(x)$一致收敛.

$x\ne0$，$u_n(x)=0$，$\sum u_n(x)$一致收敛.

假设$\exists a_n$，$\sum a_n$收敛，$|u_n(x)|<a_n$，

4. (1) $|\frac{\sin nx}{n^2}|<\frac{1}{n^2}$.

$\sum\frac{1}{n^2}$收敛.

∴一致收敛.

(2) $\sum\frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}<\frac{1}{2^n}$.

∴一致收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$ $x=1$不一致. Dirichlet

$\sum(-1)^{n-1}$一致有界，

x^n单调→0. ∴一致.

(4) $\sum\frac{x^2}{e^{nx}}=\sum\frac{x^2}{(e^x)^n}\le\sum\frac{x^2}{(e^x)^n}$.

在$[0,+\infty)$一致收敛.

(5) $x>1$，$\frac{1}{\sqrt x}<\frac1n$. $\lim\sup|\frac1n-0|$

∴$\sum\frac{1}{\sqrt n}$一致收敛. $\lim\frac1n=0$，一致.

$\alpha<\frac{1}{x+n}<\frac1n$，

$\sum\frac{(-1)^n}{n}$收敛，$\sum\frac{(-1)^n}{n+x}$. 在$[0,+\infty)$一致收敛.

(6) $\sum\frac{x^2}{(n!e)^x}$ 一致收敛.

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{e}$ → 单减→0

$\sum\frac{x^2}{n^x}$收敛.

∴在一致收敛.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\le|\frac{\sin(\frac12+n)x-\sin\frac x2}{2\sin\frac x2}|$

$\le|\frac{1}{\sin\frac x2}|\le|\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}|$ 一致有界.

$\frac1n$单调趋于0，Dirichlet 一致收敛.

$\sum a_n$收敛，对$\forall x\in[0,\infty)$，$[e^{nx}]$单调递减，$e^{nx}\to0$，∴$[e^{nx}]$单调有界.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. $x\in[0,+\infty)$，$\frac{a_n}{e^{nx}}\le a_n$

∴$\sum\frac{a_n}{e^{nx}}$一致收敛. ∴$\sum\frac{a_n}{e^{nx}}$在$x\in[0,+\infty)$一致收敛.

6. $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$.

取$a>1$，对$\forall x\in[a,+\infty)$，

$|\frac{1}{n^x}|\le\frac{1}{n^a}$. $a>1$，∴$\sum\frac{1}{n^a}$收敛.

∴$\sum\frac{1}{n^x}$在$[a,+\infty)$一致收敛.

又$\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$均连续，∴$\sum\frac{1}{n^x}$连续，

$(\frac{1}{n^x})^{(k)}<(\frac{1}{n^x})^{(n)}$ $\sum(\frac{1}{n^x})^{(n)}$收敛.

∴可导一致.

$\sum(n^{-x})^{(k)}=\sum(-\ln n)^kn^{-x}=\frac{(\ln n)^k}{n^x}$. $a>1$，$\frac{(\ln n)^k}{n^a}$收敛. ∴$\sum(n^{-x})^{(k)}$在$[a,+\infty)$一致收敛.

7. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$

① $|\frac{\sin nx}{n^4}|\le\frac{1}{n^4}$，$\sum\frac{1}{n^4}$收敛，所以一致收敛.

② $(\frac{\sin nx}{n^4})'=\frac{n\cos nx}{n^4}=\frac{\cos nx}{n^3}$. $\sum\frac{\cos nx}{n^3}$一致.（一阶）

$(\frac{\cos nx}{n^3})'=-\frac{\sin nx}{n^2}$，$\sum$一致.（二阶）

$(-\frac{\sin nx}{n^2})'=-\frac{\cos nx}{n}$，$\sum\frac1n$在$[\delta,+\infty)$收敛，$\sum\frac{\cos nx}{n}$一致（三阶）

∴$\sum(\frac{\cos nx}{n^3})'=(\sum\frac{\cos nx}{n^3})'$

一阶导论是逐项求导 ×3. 二阶导 ✓.

($\sum\frac{\cos nx}{n^3}$收敛. $\frac{\cos nx}{n^3}$连续可导. $\sum\frac{\sin nx}{n^2}$一致).

$|(\frac{\sin nx}{n^4})'|=|\frac{\cos nx}{n^3}|\le\frac{1}{n^3}$ $\sum\frac{1}{n^3}$收敛，则$|\frac{\cos nx}{n^3}|$一致收敛.

$\frac{\cos nx}{n^3}$连续可导.

$|(\frac{\cos nx}{n^3})'|=|\frac{\sin nx}{n^2}|\le\frac{1}{n^2}$. $\sum\frac{1}{n^2}$收敛，∴$\sum|\frac{\sin nx}{n^2}|$一致收敛.

∴$\frac{\cos nx}{n^3}$有连续的一阶导，∴$f(x)$有连续二阶导.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}=f(x)$.

$(\frac{x}{1+2x})^n<(\frac12)^n$，$|\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}|<|(\frac12)^n\times1|=(\frac12)^n$.

$\sum\frac{1}{2^n}$收敛. ∴$\sum\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$在$x>0$上一致收敛.

∴$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim\sum\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}=\sum\lim\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}=\sum(\frac12)^n=1$.

$\lim_{x\to1}\sum\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}=\sum\lim_{x\to1}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}=\sum(-1)^n(\frac13)^n=-\frac14$.

9. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，求$\int_{\ln2}^{\ln3}f(x)dx$.

对$\forall\delta>0$，当$x\in[\delta,+\infty)$时，

$ne^{-nx}=\frac{n}{e^{nx}}\le\frac{n}{e^{n\delta}}$. $\sum ne^{-\delta}$收敛，

∴$\sum ne^{-nx}$在$[\delta,+\infty)$一致收敛.

取$\delta=\ln2$.

$\int_{\ln2}^{\ln3}\sum ne^{-nx}=\sum\int_{\ln2}^{\ln3}ne^{-nx}dx$

$=\sum e^{-nx}|_{\ln3}^{\ln2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})=\frac12$.

习题 7.3

1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}x^n$

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}=-\frac{(n+1)^2}{n^2}$

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim(1+\frac1n)^n=e$.

$R=\frac1e$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^{2n}=a_ny^n$. $\frac{2^{n+1}x^{2n+2}}{2^nx^{2n}}=2x^2$

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$. $2x^2<1$. $|x|<\frac{1}{\sqrt2}$.

$R=\frac12$. $R=\frac{1}{\sqrt2}$.

(5) $\frac{\frac{1}{(2n+1)!!}}{\frac{1}{(2n-1)!!}}=\frac{1}{(2n+1)}$

$\sum\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!!}$

$=(x-2)+\frac{(x-2)^3}{3!}+\frac{(x-2)^5}{5!}+\cdots$

$=\begin{cases}\frac{(x-2)^k}{k!} & k为奇\\ 0 & k为偶\end{cases}$

$\lim\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\to0$

$R=\infty$.

$\frac{\frac{(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}}=\frac{(x-2)^2}{(2n+1)(2n)}$

(7) $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\frac12+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac12+\cdots+\frac1n}=1$.

$R=1$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum a_nx^n$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!n!}{(2n)!}}$

$=(n+1)^2\times\frac{1}{(2n+2)}\times\frac{1}{(2n+1)}$

$=\frac{(n+1)}{2(2n+1)}<1$.

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac14$，$R=4$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,b>0)$

$\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\frac{\frac1a(a^{n+1}+\frac bab^{n+1})}{a^{n+1}+b^{n+1}}$

$=\frac1a-\frac{\frac{b-a}{a}b^{n+1}}{a^{n+1}+b^{n+1}}$

$=\frac1a-\frac{\frac{b-a}{a}}{(\frac ab)^{n+1}+1}$.

$\frac ab>1$，$\lim\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\frac1a$. $R=a$

$\frac ab<1$，$\lim=\frac1b$. $R=b$

$a=b$. $\lim=\frac12(\frac1a+\frac1b)$. $\frac{2ab}{b+a}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n\to y^n$.

$\frac{\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=\frac{n}{n+1}\times\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n}$

$=\lim\frac{n}{n+1}\times\frac{(-\frac23)^{n+1}+1}{(-\frac23)^n+1}=1$

$R=1$

$\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}$ ① 上下都有 ② 下面都是

7.4 1.(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{2^n}=\sum\frac{y^n}{2^n}$. 原题是 $\sum\frac{x^{2n}}{2^n}$ 例 $\begin{cases}2^nx^{2n}\to1\\ 0\to+\infty\end{cases}$

$\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac12$. $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac12$.

$R^2=2$，$R=\sqrt2$.

3. (1) $a_nx^{2n+1}=\begin{cases}-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, & n为奇\\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, & n为偶\end{cases}$

$\Sigma=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\cdots$

$=\begin{cases}-\frac{x^n}{n}, & n=4k+3 \to \frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{n}{n+1}\to-1, R=1\\ \frac{x^n}{n}, & n=4k+1 \to \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n}{n+1}\to1, R=1\\ 0, & n=2k \to R=+\infty\end{cases}$

取$x=1$. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times\frac{1}{2n+1}$ 收敛. $x=-1$ ✓.

∴已域 $[-R,R]$. $[-1,1]$.

$\lim|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}|=\lim|-\frac{x^2(2n+1)}{(2n+3)}|=1$.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum(-1)^n\int_0^xt^{2n}dt$

$=\int_0^x\sum(-1)^nt^{2n}dt=\int_0^x\frac{1-(-t)^{2n}}{1-(-t)^2}dt$

$=\int_0^x\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}dt=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=-\int_0^x\frac{1}{(t+1)(t-1)}dt$

$=-\frac12\ln|\frac{t-1}{t+1}|$

$x^{n+1}=\frac{x(1-x^n)}{1-x}$

(2) $\lim\frac{(n+1)x}{nx}=1$. $R=1$. 已域$(-1,1)$.

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'=(\frac{x}{1-x})'=\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}$

(3) $\lim\frac{n(n+1)}{m(n+1)}=1$. 已域$(-1,1)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\sum(x^{n+1})''=(\sum x^{n+1})''=(\frac{x}{1-x})''$

$=(\frac{1}{(1-x)^2})'=((1-x)^{-2})'=2(1-x)^{-3}$.

(4) $\lim\frac{n(n-1)}{n(n+1)}=1$. $R=1$. 已域$[-1,1]$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac1x\sum\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac1x\sum\int_0^x\frac{t^n}{n}dt$

$(\frac{x^n}{n(n+1)})'=n\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$ $(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)})''=(\frac{x^n}{n})'=x^{n-1}$

$=\frac1x\int_0^x\sum\frac{t^n}{n}dt=\frac1x\int_0^x\sum\int_0^tm^{n-1}dm\,dt$

$=\frac1x\int_0^x\int_0^t\sum m^{n-1}dm\,dt$

$=\frac1x\int_0^x\int_0^t\frac{1}{1-m}dm\,dt=\frac1x\int_0^x-\ln(1-t)\,dt$

$=-\frac1x\int_0^x\ln(1-t)dt$.

$=-\frac1x(t\ln|1-t||_0^x-\int_0^xt\,d\ln(1-t))$

$=-\frac1x(x\ln(1-x)+\int_0^x\frac{t}{1-t}dt)$

$=-\frac1x(x\ln(1-x)+\int_0^x-1-\frac{1}{t-1}dt)$

$=-\frac1x(x\ln(1-x)+(-t-\ln|t-1|)|_0^x)$

$=-\frac1x(x\ln(1-x)-x-\ln(1-x))$

$=-\ln(1-x)+1+\frac1x\ln(1-x)$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$. $\frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}}{\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}}=\frac{x^2}{2n+1}<1$. $x\in(-\infty,+\infty)$

$(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!})'=\frac{x^{2n-2}}{(2n-3)!!}=\cdots$ $(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!})^{(n)}=x$.

$\sum\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=\sum\int_0^x\frac{t^{2n-3}}{(2n-3)!!}dt=\int_0^x\sum\frac{t^{2n-3}}{(2n-3)!!}dx$

$=\int_0^x\sum\int_0^t\frac{m^{2n-5}}{(2n-5)!!}dm\,dt$

$=\int_0^x\int_0^t\sum\frac{m^{2n-5}}{(2n-5)!!}dm\,dt$

$=\int_0^x\int_0^t\int\cdots\int\sum u\,du\cdots dm\,dt$

$=\int_0^x\int_0^t\int\cdots\int nu\,du\cdots dm\,dt$

$=\cdots\int_0^xn\frac12u^2du\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$

$(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!})'''=(\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)!!})''=(\frac{x^{2n-2}}{(2n-3)!!})''$

$=(\frac{(2n-2)x^{2n-3}}{(2n-3)!!})'$

$=\frac{(2n-2)x^{2n-4}}{(2n-3)!!}$

$(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!})^{(2n-1)}=(2n-2)!!$

∴$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int(2n-2)!!\,d\cdots dx$

$(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!})'=\frac{x^{2n-2}}{(2n-3)!!}=x\cdot\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!!}$

$(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!})'=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!!}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$

$f'(x)=xf(x)$

4. (1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n$

$\lim\frac{\frac{1}{(n+1)^2-1}}{\frac{1}{n^2-1}}=\lim\frac{(n+1)(n-1)}{n(n+2)}=1$，$R=1$.

$x=1$ ✓ $x=-1$. $[-1,1]$.

$\frac1x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)}=\frac1x\sum\int_0^x\frac{t^n}{(n-1)}dt=\frac1x\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n-1}dt$

$=\frac1x\int_0^xt\sum\frac{t^{n-1}}{n-1}dt=\frac1x\int_0^xt\sum\int_0^tu^{n-2}du\,dt$

$=\frac1x\int_0^xt\int_0^t\sum u^{n-2}du\,dt=\frac1x\int_0^xt\int_0^t\frac1u\times\frac{1}{(1-u)}du\,dt$

$=\frac1x\int_0^x-t\int_0^t\frac{1}{u(u-1)}du\,dt$

$=\frac1x\int_0^x-t\ln|\frac{t-1}{t}|dt=-\frac1x\int_0^x\ln|\frac{t-1}{t}|d\frac12t^2$

$=-\frac12\frac1x\int_0^x\ln|\frac{t-1}{t}|dt^2$

$=-\frac12\frac1x(t^2\ln|\frac{t-1}{t}||_0^x-\int_0^xt^2\times\frac{t}{t-1}\times(-\frac{1}{t^2})\times(-1)dt)$

$=-\frac12\frac1x(x^2\ln(\frac{1-x}{x})-\int_0^x\frac{t}{t-1}dt)$

$=-\frac12\frac1x(x^2\ln(\frac{1-x}{x})-\int_0^x1+\frac{1}{t-1}dt)$

$=-\frac12\frac1x(x^2\ln(\frac{1-x}{x})-x-\ln|x-1|)$

$=\frac x2\ln(\frac{1-x}{x})+\frac12+\frac{\ln(1-x)}{2x}$.

取$x=\frac12$. 原式$=\frac14\ln1+\frac12+\frac{\ln\frac12}{1}=\frac12+\ln\frac12$.

2. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac1n$

$\sum\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，$x=-1$，$\sum(-1)^{n-1}\frac1n=-\ln2$.

$\lim\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac1n}=1$. $R=1$. $\ln|1+x||_0^1=\ln2$

5. (1) $f(x)=x^3-2x^2+5x-7$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有界

$f(x)=((x-1)+1)^3-2((x-1)+1)^2+5((x-1)+1)-7$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3!}{n!(3-n)!}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2!}{n!(2-n)!}x^n+5((x-1)+1)-7$

$=((x-1)+1)^3-2((x-1)+1)^2+5((x-1)+1)-7$.

$=1+3(x-1)+\frac{3\times2}{2}(x-1)^2+\frac{3\times2\times1}{6}(x-1)^3$

$-2(1+2(x-1)+\frac{2\times1}{2}(x-1)^2)+5(1+(x-1))-7$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdots(4-n)}{n!}(x-1)^n-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdots(3-n)}{n!}(x-1)^n$

$+5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times\cdots(2-n)}{n!}(x-1)^n-7$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdots(4-n)-2\times2\cdots(3-n)+5\times1\cdots(2-n)}{n!}(x-1)^n-6$

(2) $e^{\frac xa}=e^{\frac{x-a+a}{a}}=e^{\frac{x-a}{a}+1}=e\times e^{\frac{x-a}{a}}$

$=e\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x-a}{a})^n}{n!}=e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{a^nn!}$. $\frac{x-a}{a}\in[-1,1]$. $x\in[0,2a]$.

(3) $\ln(x-1+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$. $(x-1)\in[-1,1]$，$x\in[0,2]$.

(4) ✓ $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{(x+4)-3}-\frac{1}{(x+4)-2}$

$=\frac{1}{-3[-\frac{x+4}{3}+1]}-\frac{1}{-2[-\frac{x+4}{2}+1]}$

$\frac{x+4}{2}\in(-1,1)$，$x\in(-6,-2)$

$=-\frac13\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-\frac{x+4}{3})^n+\frac12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-\frac{x+4}{2})^n$

$=-\frac13\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n+\frac12\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n$.

(5) $\ln(-2x^2+x+1)=\ln(2x+1)(-x+1)=\ln(2x+1)+\ln(-x+1)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac1n(2x)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac1n(-x)^n$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n[(-2x)^n+(-x)^n]$ $x\in(-\frac12,\frac12]$.

(6) $\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n=(-1)^n(\frac{\sqrt2}{2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(x-\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2})}{n!}$.

$x\in(-\infty,+\infty)$ 收敛.

6. (1) $\sin^2x=\frac12-\frac12\cos2x$

$\cos2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

$\sin^2x=\frac12-\frac12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

$=\frac12-\frac12(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!})$

$=\frac12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}dt$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^xt^{2n}dt$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(3) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac12\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac12(\ln(1+x)-\ln(1-x))$

$=\frac12(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n})$

$=\frac12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^n+(-x)^n)$

习题 7.4

1. (1) $\int_0^1e^{-x^2}dx$

$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$ $x=1$，收敛. $((-x^2)^{n+1})'=(n+1)(-2x)$

∴ $\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-x^2)^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1(-x^2)^ndx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\times[\frac{1}{n+1}(-\frac13x^3)^{n+1}|_0^1]=\sum(-\frac13)^{n+1}\frac{1}{n!}$

$(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})'=\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}$

(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$

$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

$\int_0^1\sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\times\frac{1}{2n+1}|_0^1$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}$.

2. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，$y''=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$a_0=0$. $a_1=a_1x$. $2a_2-2a_2x+a_2x^2=0$

章末综合

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac1n-\frac{1}{n+1})(1+\frac12+\cdots+\frac1n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

$\lim\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac1k(n-1)}{\sum_{k=1}^{n}\frac1k(n+1)}=1$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$. Leibniz.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\lim\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

$S_n=-\frac{7}{2\times3}+\frac{9}{3\times4}-\cdots+(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

$\lim\frac{\frac{(-1)^{n+1}2n+5}{(n+2)(n+3)}}{\frac{(-1)^n2n+3}{(n+1)(n+2)}}=\lim-\frac{2n+5}{2n+3}\times\frac{n+1}{n+3}$

3. (⇒) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$ 收敛. $a_{n+1}>a_n$.

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=0$ $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，$\lim\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=0$，$\lim a_{n+1}-a_n=0$.

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$.

∴ $a_n-\varepsilon<a_n<a_{n+1}<a_n+\varepsilon$，$0<a_{n+1}-a_n<\varepsilon$.

(⇐) $\{a_n\}$有界，对$\forall n$，$\exists M$，$|a_n|<M$.

∵$\{a_n\}$单增，∴$\{a_n\}$收敛.

有界 ⇒ 有上确界，取 $a=\sup\{a_n\}$.

则对$\forall\varepsilon$，$\forall n>N$，有 $a_n<a<a_n+\varepsilon$.

∴ $\lim a_n=a$.

$\sum(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_2}{a_1}-n=0$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$

$\{a_n\}$单增，正数列，试证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}[\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}+(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}})]$

$=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}})$

$\triangleq y_n+z_n$.

$z_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}})=(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}})$

$\le\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}$

∴$\sum_{n=1}^{\infty}z_n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}=\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}$ 收敛.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha}}\le\sum\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$.

(面积，右矩). $=\int_{a_1}^{a_{n+1}}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx<\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$.

$y=\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ 在$(1,+\infty)$可积，∴$\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha}}$ 收敛.

7. a_n为严格单调递增，且对$\forall n\in N^*$，

$a_n\le n^2\ln n$. 求证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

$a_n\le n^2\ln n$ $\frac{1}{a_n}\ge\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{\ln n}$.

$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2\ln(n+1)-n^2\ln n=n^2\ln\frac{n+1}{n}+(2n+1)\ln(n+1)$

引：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，$a_n>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$收敛.

a_n单调. $a_n+\cdots+a_{2n}>a_1+\cdots+a_{n-1}$

$>a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}\ge na_n$

∴ $\frac{2n-1}{a_1+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+\cdots+a_{2n}}\le\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{na_n}<\frac{4}{a_n}$.

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，∴$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$收敛.

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$. (a_n收敛，待证成立).

a_n发散，$b_1+\cdots+b_n=a_{n+1}-a_1$.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_1+b_2+\cdots+b_k}\le4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}-a_1}\le4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}$.

$\frac{n}{a_{n+1}-a_1}\ge\frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)}\ge\frac12\cdot\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.