证明　重开

2021年12月20日 星期一　　上午11:44

Cauchy → Weierstrass 判别. Dirichlet. Abel

一、正项级数.

1. 定义：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n 项部分和. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛至 S.

2. 性质

① Cauchy 收敛准则.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，对 $\forall n > N$，有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ 对 $\forall p > 0$ 成立.

② 级数收敛 ⇒ 通项 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

③ 线性性.

④ 保序性.

3. 判别.

① 有界：S_n 单增，有界 ⇒ S_n，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

② 比较：从某项起 $0 \le a_n \le b_n$.
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 ⇒ a_n 收敛，
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 ⇒ b_n 发散

③ 比较′：$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ 有限正数，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散
$A = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
$A = +\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证明：$\frac{A}{2} < A < \frac{3}{2}A$，
从某个 n 开始，$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}A$.

④ Cauchy 根值：
对某项起，$\sqrt[n]{a_n} < p < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
对无穷多 n，$\sqrt[n]{a_n} \ge 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
$\Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$，$p > 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，
$p < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
$p = 1$，无法判断.

证明：不妨设"某项"为首项，即所有 n，
$0 < \sqrt[n]{a_n} < p < 1$，其中 $p \in [0, 1)$.
则 $0 < a_n < p^n < 1$.
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$，收敛.
若无穷多个 n 满足 $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$，
则 a_n 不以 0 为极限，∴ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

⑤ D'Alembert 判别.
从某项起，$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
从某项起，$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$，$q > 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
$q < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，
$q = 1$，无法确定.

证明：不妨设对所有 n 都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$，
$\frac{a_2}{a_1} \le q$，$\frac{a_3}{a_2} \le q$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}} \le q$.
∴ $\frac{a_n}{a_1} \le q^{n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{q} \cdot q^n$
$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

⑥ Cauchy 积分：
$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 非负单减，则 ~~f(n)~~ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

证明：$f(k+1) \le f(x) \le f(k)$.
∴ $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le f(k)$.
∴ $\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
$n \to +\infty$，$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

⑦ 比较″：

⑧ Raabe
正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 从某项起恒有 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge r > 1$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1$，发散.

证明：$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge r > 1$.
$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n \ge r$. $\frac{u_n}{u_{n+1}} \ge \frac{r}{n} + 1$. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}$.
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{\frac{r}{n}+1} \le \frac{1}{\frac{1}{n}+1} = \frac{n}{1+n} < 1$.
根据 D'Alembert. u_n 收敛.
$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1$.
$\frac{u_n}{u_{n+1}} \le \frac{1}{n} + 1$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge \frac{1}{\frac{1}{n}+1} > \frac{1}{n}$ 发散.
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

二、一般交号级数.

1. 判别.

① Cauchy 收敛准则.

② Leibniz 判别法.
a_n 单调趋于零，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 为 Leibniz 级数，收敛值在 $0 \sim a_1$ 间.

证明：$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$
$S_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$
a_n 单减. $a_{2n-1} > a_{2n}$，$a_{2n-1} - a_{2n} > 0$
∴ $0 < S_{2n} < S_{2n+2}$.
又 $S_{2n-1} > S_{2n}$，$S_{2n+1} > S_{2n+2}$.
$S_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$
a_n 单减，$a_{2n-2} - a_{2n-1} > 0$.
∴ $a_1 > S_{2n-1} > S_{2n+1}$.
即 $0 < S_{2n} < S_{2n+2} < S_{2n+1} < S_{2n-1} < a_1$.
$\{S_{2n}\}$ 单增，上界 a_1，
$\{S_{2n-1}\}$ 单减，下界 0. } 都收敛.
$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$，$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - a_{2n-1} = S$.
收敛到同一个极限.

③ Weierstrass 控制收敛.
$|a_n| < b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + \cdots + a_n)$
$\le \lim_{n\to+\infty} |a_1 + \cdots + a_n|$
$\le \lim_{n\to+\infty} |a_1| + \cdots + |a_n|$
$\le \lim_{n\to+\infty} b_1 + \cdots + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

④ Dirichlet 判别法.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和有界，$\{b_n\}$ 单调趋于零，
则有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

⑤ Abel 判别法
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\{b_n\}$ 单调有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明：引理 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$
$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k$
$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$
$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$
$= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$.

引理 $|A_k| \le M$，则 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le M(|b_1| + 2|b_n|)$
$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})\right|$
$\le |A_n b_n| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})\right|$
$\le M|b_n| + M\left|\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})\right|$
$= M(2|b_n| + |b_1|)$.

记 $L_n = \sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|\right\}$.
∴ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le L_n \times (|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|)$

D：部分和 L_n 有界，∴ $\exists M$ 使对 $\forall n$，$L_n < M$.
$\{b_n\}$ 单调趋于 0，不妨设单减至 0，
对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$n > N$ 时，$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}$
∴ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left|S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})\right|$
$\le M(|b_1| + 2|b_n|)$
∴ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，
$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le M|b_1| + \varepsilon$，$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = M|b_1|$. 收.

A：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，∴ $\exists M$，对 $\forall n$，$|L_n| < M$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
$\{b_n\}$ 单调有界，∴ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
$a_n b_n = a_n(b_n - b) + b a_n$，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = b a_n$ 收敛.
∴ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le M(|b_1| + 2|b_n|)$ 收敛.

三、乘积级数.

1. 定义：Cauchy 乘积级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{matrix} \Rightarrow \begin{aligned} & a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \cdots \\ & = c_1 + \cdots + c_n + \cdots \\ & c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}. \end{aligned}$$

2. 乘积级数判别

① 引理：记 $\Delta_n = a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \cdots + a_n r_1$.
其中 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，r_n 趋于零，
则有 $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，$\lim_{n\to+\infty} |a_1| + \cdots + |a_n| = S$.
∴ $\exists$ 正常数 L，使 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le L$，$|r_n| \le L$.
对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$|r_n| < \frac{\varepsilon}{2L}$.
对给定的 ε，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$\sum_{k=n}^{+\infty} |a_k| \le \frac{\varepsilon}{2L}$.
∴ 当 $n > 2N$ 时，$n + 1 - N > N$，
有 $\Delta_n \le \sum_{k=1}^{n} |a_k r_{n+1-k}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k r_{n+1-k}|$
$= \sum_{k=1}^{n} |a_k| |r_{n+1-k}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |r_{n+1-k}|$
$\le L \times \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L} \times L = \varepsilon$.

② Mertens 定理.
假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，其和值为 A，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛至 B，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛至 AB.

证明：$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$
$= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1)$
$= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1$
$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B - a_1(B - B_n) - a_2(B - B_{n-1}) - \cdots - a_n(B - B_1) = A_nB - \Delta_n$.
$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_nB - \lim_{n\to\infty} \Delta_n = AB$.

三、函数项级数.

1. 收敛性

① 逐点收敛：对點 $x_0 \in I$，$f_n(x_0)$ 有 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

② 一致收敛：对 $\forall \varepsilon > 0$，所有 $x \in I$，$f_n(x)$ 都满足 $\forall \varepsilon > 0$，……$< \varepsilon$.
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$.

2. 判别法

① Cauchy
对 $\forall x \in I$，都有 $f_n(x)$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，对 $\forall p > 0$，$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.
则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛.

② Weierstrass 控制收敛.
$|u_n(x)| < a_n$ / $a_n(x)$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛.

③ Dirichlet.
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$，$\{v_n(x)\}$ 单调且一致趋于零，
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致有界.

④ Abel.
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，
$v_n(x)$ 单调且一致有界.

3. 性质

① $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x \in I$ 一致连续，$u_n(x)$ 连续，
则 $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$. $\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$

② $u_n(x)$ $\underbrace{\text{可导}}_{}$ (C^1)，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛，
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$. ($C^1$)

③ $u_n(x)$ 连续可积，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 积.
$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$.

四、幂级数.

1. 定义：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

2. 收敛区间的判断：
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 处收敛，则在 $|x| < R$ 上收敛
发散，则在 $|x| > R$ 上发散.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n\right| < M$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \frac{x^n}{R^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，$x < R$，$\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 单调有界.

3. 收敛半径的计算
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R}$

4. 性质

① 连续 ⇒ 和函数连续.
端点处极限.

② 可导 ⇒ 和函数可导.

③ 可积 ⇒ 和函数可积

5. Taylor 展开.

① $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n + R_n$.
$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$，则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n$.
$|f^{(n)}(x)| < M$，则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n$

② 常用例.
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$.
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.