补充题

2021年12月21日 星期二　　上午9:12

1. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[2+(-1)^n]^n}$.

$\sqrt[n]{\frac{n}{[2+(-1)^n]^n}}=\frac{\sqrt[n]{n}}{2+(-1)^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2+(-1)^n}$

$\frac{n}{[2+(-1)^n]^n}=\begin{cases}n, & n\text{为奇}\\ n(\frac{1}{3})^n, & n\text{为偶}\end{cases}$ → 发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-1$. 发散.

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$

$0<\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$　$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{4}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\le\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\sin\frac{1}{n}$

$\frac{n-1}{n+1}\sin\frac{1}{n}<\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$. 收敛，条件收敛

$\sin\frac{1}{n}$单减→0. $\sum(-1)^n\sin\frac{1}{n}$收敛. $\frac{n-1}{n+1}$有界. 收敛

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n})$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}=-\ln\frac{\sin x}{x}=-\ln(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3))\sim\frac{1}{6}x^2-o(x^2)$ 收敛

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^n+(-4)^n}=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+4^n}, & n\text{为偶}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-4^n}, & n\text{为奇}.\end{cases}$

$\frac{3^n}{5^n+4^n}<\frac{3^n}{4^n+4^n}=\frac{3^n}{2\times4^n}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{4})^n$ 收敛.

$\frac{3^n}{5^n-4^n}<\frac{3^n}{4^{n-1}\times5-4^n}=\frac{3^n}{4^{n-1}}=3\times\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$ 收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{5}\times\sqrt[n]{\frac{5^n}{5^n+(-4)^n}}=\frac{3}{5}<1$

(9). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\frac{(n^2+1)\pi}{n}$

$\sin\frac{(n^2+1)\pi}{n}=\sin\pi(n+\frac{1}{n})=\sin(n\pi+\frac{1}{n}\pi)=(-1)^n\sin(\frac{1}{n}\pi)$.

$\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$发散.

$\sin\frac{\pi}{n}$单减，$(-1)^n\sin(\frac{\pi}{n})$收敛　⇒ 条件收敛.

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{(-1)^n\cdot\ln^3n}$

$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}-1}{(\ln n)^3}$　$\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln^3n}=\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{\ln^3n}\sim\frac{\frac{1}{n}\ln n}{\ln^3n}=\frac{1}{n\ln^2n}$ 收敛.

∴原级数绝对收敛.

2. (1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p+a\cos nx}$ 收敛.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\cos nx=\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x|}{|2\sin\frac{x}{2}|}\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ 有界.

$n^p+a\cos nx$

$u_n=\frac{\cos nx}{n^p+a\cos nx}=\frac{\cos nx}{n^p}-a\cdot\frac{\cos^2nx}{(n^p+a\cos nx)\cdot n^p}=v_n-a\cdot u_n$

$v_n=\frac{\cos nx}{n^p}$收敛. $u_n'=\frac{\cos^2nx}{(n^p+a\cos nx)\cdot n^p}\le\frac{1}{(n^p-1)n^p}\sim\frac{1}{n^{2p}}$.

3. (1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$收敛 ⇒ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n-a_{n-1}$收敛.

部分和 $S_n=a_2-a_1+\cdots+a_n-a_{n-1}=a_n-a_1$收敛.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-a_1=S$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，∴$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-b_n}=1$. 有界. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛.

Abel 判别法

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n[n+(-1)^n]^t$ 收敛, $t<0$.

收敛 ⇒ $[n+(-1)^n]^t$单减→0.

$t\ge0$, $[n+(-1)^n]^t$单增. 通项不趋于0.

$t<0$. 通项趋于0. $(3^t-2^t)+(5^t-4^t)+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)^t-(2n)^t$

$\sim(2n)^t[(1+\frac{1}{2n})^t-1]\sim\frac{t}{(2n)^{1-t}}$.

5. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\beta}$ 收敛 ⇔ $\beta>\alpha$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\beta}$ 收敛 ⇔ $\beta>\alpha-1$

(1) $(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha[(1+\frac{1}{n})^\alpha-1]\sim n^\alpha\times\frac{\alpha}{n}=\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.

$\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\beta}\sim\frac{\alpha}{n^{1+\beta-\alpha}}$.

6. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}$

$\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$单减→0. 收敛则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$收敛. ∴ $x\in[-1,1]$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{\sqrt{n}}$.

$\frac{1}{\sqrt{n}}$单减→0. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{3n}$收敛 ∴ $x\in(-1,1)$.

当$x=-1$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^x}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ 有界. $\frac{1}{n^x}$单调→0. $x>0$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x^n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx\le\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin\frac{x}{2}|}{|2\sin\frac{x}{2}|}\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ 有界.

$\frac{1}{x^n}$单调→0. $x>1$.　$\frac{\sin nx}{x^n}<\frac{1}{x^n}$　$|x|>1$.

7. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{e^{nx}}$, $x>0$.

$\frac{x}{e^{nx}}=a_n$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^{(n+1)x}}{e^{nx}}=\frac{1}{e^x}<1$. 在$x>0$上 ✓.

∴ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{e^{nx}}$在$x>0$上一致收敛.　$x=0$处

余和 $r_{n+1}(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{x}{e^{kx}}=\frac{x}{(e^x-1)e^{nx}}$ 在$x=0$处的右极限为1，故余和函数列在$x>0$中不一致趋于零，∴不一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$

$\frac{x}{(1+x)^n}\le\frac{x}{(1+\delta)^n}$

余和 $r_{n+1}(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^k}=\frac{1}{(1+x)^n}$ 在$x\ge\delta$中一致趋于0.

∴ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^b}{(1+x)^n}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^b}{(1+x)^n}$　余和 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^b}{(1+x)^k}$

$\frac{x^b}{(1+x)^n}=\left(\frac{x}{(1+x)^{\frac{n}{b}}}\right)^b<\left(\frac{x}{1+\frac{n}{b}x}\right)^b<\left(\frac{x}{\frac{n}{b}\cdot x}\right)^b=\frac{b^b}{n^b}$.

(4) $\left\{\frac{x^p}{(1+x)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\left\{\frac{x^p}{e^{nx}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在$x>0$时一致趋于0.

$\frac{x^p}{(1+x)^n}=\left(\frac{x}{(1+x)^{\frac{n}{p}}}\right)^p<\left(\frac{x}{1+\frac{n}{p}x}\right)^p<\left(\frac{p}{n}\right)^p$.

$\frac{x^p}{e^{nx}}=\left(\frac{x}{e^{x\frac{n}{p}}}\right)^p<\left(\frac{x}{(1+x)\frac{n}{p}}\right)^p\cdots$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx}{(1+x)^n}$.

$\frac{x}{(1+x)^n}<\frac{1}{n}$, 单调→0. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx}{(1+x)^n}$一致收敛

$n\ge2$, $x>0$时

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$部分和有界.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{xe^{-nx}}{\ln^2n}$.

$\frac{x}{e^{nx}}\cdot\frac{1}{\ln^2n}$　$\frac{x}{e^{nx}}<\frac{x}{(1+x)^n}<\frac{x}{nx+1}<\frac{1}{n}$.

∴ $\left\{\frac{x}{(1+x)^n}\right\}$单减→0　$\left\{\frac{x}{e^{nx}}\right\}$单减→0

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2n}$ 收敛

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cos nx}{\ln(x+n)}$

$<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln(x+n)}$.　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$有界. $\frac{1}{\ln(x+n)}$在$x>0$单减→0

8. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})x^n$

$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}=1$. $|x|<1$. 收敛域→端点

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n+(-2)^n}x^n$

∴根据根值 $\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{3^n+(-2)^n}}=\frac{1}{3}$.

1. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\sqrt{x}\,d\arctan x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\arctan x\sqrt{x}\Big|_0^{\frac{1}{n}}-\int\arctan x\,d\sqrt{x}\right]$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n})$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$

$x\to0$, $\ln x-\ln\sin x=-\ln\frac{\sin x}{x}=-\ln(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3))$

$\sim\frac{1}{6}x^2-o(x^2)\sim\frac{1}{6}x^2$

$\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^2}$ $(n\to\infty)$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p$

$=e^p[1-e^{-1}(1+\frac{1}{n})^n]^p=e^p[1-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}]^p$

$=e^p\cdot e^{p\ln(1-e^{-1}(1+\frac{1}{n})^n)}$　$\sim e^p[-(n\ln(1+\frac{1}{n})-1)]^p$

$=e^p[1-n\ln(1+\frac{1}{n})]^p\sim e^p(\frac{1}{2n})^p$.

$=(\frac{e}{2})^p\cdot\frac{1}{n^p}$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$.

$a^{\ln n}=n^{\ln a}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln a}}$.

(5) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

$=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln\ln n\cdot\ln(\ln n)}}=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}$

$>\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

$\sim\int_1^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_1^{\infty}\frac{1}{2^t}\cdot2t\,dt$ 收.

2. $-1<a_n\ne0$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

$P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_n)$ 收敛到有限正数

$\ln P_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$ 收敛.

$|\ln(1+a_n)|<|a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$收敛. ∴ $\ln P_n$收敛.

3. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n^p}$的敛散性.

$q>1$. 发散. ⇒ $|q|>1$发散

$q=1$　$p>1$收敛.　$q=1$. $\begin{cases}p>1\\ p\le1\end{cases}$

$p\le1$发散.　$q=-1$. $\begin{cases}p>0\\ p\le0\end{cases}$

$0<q<1$ 收敛, ⇒ $|q|<1$收敛.

$q=0$. 恒为0, 收敛. $0^0=1$.

$q<0$ 发散?

4. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^n+(-4)^n}$

$=\begin{cases}\frac{3^n}{5^n+4^n}=\frac{1}{(\frac{5}{3})^n+(\frac{4}{3})^n} & n\text{为偶} \text{ 收敛.}\\ \frac{-3^n}{5^n-4^n}=\frac{-1}{(\frac{5}{3})^n-(\frac{4}{3})^n}\end{cases}$

Cauchy 根值. $\sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n}{5^n+(-4)^n}\right|}=\sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n+(-4)^n}}$

$=\frac{3}{5}\sqrt[n]{\frac{5^n}{5^n+(-4)^n}}=\frac{3}{5}<1$.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\frac{(n^2+1)\pi}{n}$

$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n+\frac{1}{n})\pi=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$.

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{(-1)^n\cdot\ln^3n}$

$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln^3n}\Rightarrow\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{\ln^3n}\sim\frac{\frac{1}{n}\ln n}{\ln^3n}=\frac{1}{n\ln^2n}$.