例题　重开

2021年12月20日 星期一　　下午4:58

一、级数敛散性判别.

例. 讨论下列正项级数的敛散性.

(1) ① $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$.　② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}$.

17-3-9 △　③ $\sum_{n=2}^{\infty}(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n})$　17-3-9 △　④ $\sum_{n=2}^{\infty}(e-\ln(1+\frac{1}{n})^n)^p$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

(2) ① $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^p}$.　② $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.　③ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$.

④ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n^{\ln(\ln n)}}$.　⑤ $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$　⑦ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n}$

(3) ① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^n+(-4)^n}$

③ $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{an}{\ln n})^n$.

(4) D'Alembert

① $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$.

(5) 必要条件.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[2+(-1)^n]^n}$

(6) 积分判别.

① $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

例. 讨论下列正向级数的敛散性.

(1) 比较的极限形式.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$.

$\sin\frac{1}{n^p}\sim\frac{1}{n^p}$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 一样收敛.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}$.

$\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{3(n+\frac{2}{3})}{\sqrt{n^2+1}}=3\times\sqrt{\frac{n^2+\frac{4}{3}n+\frac{4}{9}}{n^2+1}}\sim3\times(n^{2-1})^{\frac{1}{2}}=3\times n^{\frac{1}{2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{2}}$ 一样收敛.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$

$\ln\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\sim\ln\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})}\sim\ln\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}}\sim\ln\frac{1}{1-\frac{1}{6}\frac{1}{n^2}}$

$=-\ln(1-\frac{1}{6}\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, $\therefore$原级数收敛.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}(e-(1+\frac{1}{n})^n)^p$　等价替换.

$[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p=e^p[1-\frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^n]^p$

$=e^p[1-e^{\ln\frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^n}]^p=e^p[1-e^{\ln(1+\frac{1}{n})-1}]^p\sim e^p[1-\ln(1+\frac{1}{n})]^p$

$x\to0$, $1-\frac{1}{x}\ln(x+1)=1-\frac{1}{x}[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]=\frac{1}{2}x+o(x)$

$\therefore n\ln(1+\frac{1}{n})-1\sim-\frac{1}{2n}$

$=e^p\times(\frac{1}{2n})^p=(\frac{e}{2})^p\frac{1}{n^p}$.

$p>1$ 收敛, $p\le1$ 发散.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{n})^{n^3}$

$\sqrt[n]{(\cos\frac{1}{n})^{n^3}}=(1-\frac{1}{2n^2})^{n^2}\sim(1-\frac{1}{2n^2})^{n^2\times\frac{1}{2}}$

$=[(1-\frac{1}{2n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{2}}\to e^{-\frac{1}{2}}$ 收敛

⑥ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{(-1)^n\ln n}$

$=\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{\ln n}\times(-1)^n\sim\frac{\frac{1}{n}\ln n}{\ln n}\times(-1)^n=\frac{1}{n\ln n}\times(-1)^n$.

(2) 比较的一般形式.

① $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^p}$

$\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^p}\Rightarrow n^a(\ln n)^b$ 模型.

取 $c_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{a_n}{c_n}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}(\ln n)^p}\div\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\ln n)^p}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\ln n)^p}$ 发散, c_n 发散. $\therefore a_n$ 发散.

☆ $\lim_{x\to0^+}x^a|\ln x|^b=0$, $\lim_{x\to+\infty}x^a|\ln x|^b=+\infty$.

($\forall\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ 时. x^a 比 $\ln x$ 主导).

② $\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(n!)\cdot(n!)}{2n!!(2n-1)!!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}$ 收敛.

③ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$.

考虑一般情况 $\frac{1}{a^{\ln n}}$.

$a^{\ln n}=n^{\ln a}$. $\therefore\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln a}}$

$\therefore a>e$, $\ln a>1$, 级数收敛.

$a\le e$, $\ln a\le1$, 级数发散.

④ $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{\underbrace{\ln(\ln n)\cdot\ln(\ln n)}_{>1}}}>\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$. 发散.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$.

$0<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\times\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛.

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

(3) Cauchy 根值.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

$a_n=\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$, $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n\to\frac{e}{3}<1$.

若改为 $\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$, $\sqrt[n]{a_n}\to\frac{e}{2}>1$.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^n+(-4)^n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n}{5^n+(-4)^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n+(-4)^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n}\cdot\frac{1}{1+(-\frac{4}{5})^n}}$

$=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1+(-\frac{4}{5})^n}}=\frac{3}{5}<1$.

③ $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{an}{\ln n})^n$.

$\sqrt[n]{(\frac{an}{\ln n})^n}=\frac{an}{\ln n}$. $a>1$ 发散. $0<a<1$ 收敛.

$a=1$, $(\frac{n}{\ln n+1})^n=(\frac{\ln n}{n})^{-n}=(1+\frac{1}{\ln n})^{-n}$ 收敛.

(4) D'Alembert

① $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$.

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)\times(\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(\frac{x}{n})^n}=\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}\longrightarrow\frac{x}{e}$.

$x<e$, 收敛. $x>e$, 发散.

$x=e$. $a_n=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k=\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n$.

$a_n=n!(\frac{e}{n})^n>(\frac{n+1}{e})^n=(1+\frac{1}{n})^n\ge2$.

不趋于零, 故发散.

(5) 必要条件.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[2+(-1)^n]^n}$

对 $\frac{n}{[2+(-1)^n]^n}=\begin{cases}\frac{n}{3^n}, & n\text{ 为偶}\\ n, & n\text{ 为奇}\end{cases}$ $\therefore$发散. $\to$不趋于0.

(6) 积分判别.

① $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}dx$ 同敛散.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^t}dt^2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^t}\times2t\,dt$

$=\frac{-2t}{\ln2}2^{-t}\Big|_1^{+\infty}+\frac{2}{\ln2}\int_1^{+\infty}2^{-t}dt$

$=\frac{1}{\ln2}-\frac{2}{(\ln2)^2}\cdot2^{-t}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{\ln2}+\frac{1}{(\ln2)^2}$ 收.

二、函数项级数与一致收敛.

例. $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(-1,1)$ 不一致收敛, 但在 $[-a,a]$ 上一致收敛, 其中 $0<a<1$.

证明: 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, $|x^n|<|a^n|$ 对 $x\in[-a,a]$ 恒成立. $\therefore\{x^n\}$ 一致收敛.

例. $\{a_n\}$ 单调趋于零, $s\in(0,\pi)$, 试证: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ 在区间 $[s,2\pi-s]$ 中一致收敛.

证明: $\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\text{ 在 }[0,2\pi]\text{ 中不一致收敛}\right]$ 如取 $a_n=\frac{1}{n}$, 则 $x=0$ 处不论点.

a_n 单调趋于零,

$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{s}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{s}{2}}=P$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 一致收敛. 即可.

例. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个数列, 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=12>0$ 处收敛, 则它在区间 $[0,12]$ 中一致收敛.

证明: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. $x=R$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛.

$u_n(x)=a_nx^n=a_nR^n(\frac{x}{R})^n$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛.

$x\in[0,R]$, $(\frac{x}{R})^n$ 对 $\forall x$ 单调且一致有界.

$\therefore$原幂级数在 $[0,R]$ 一致收敛.

* $x=12$ 处收敛: 已知 $a_n(-R)^n(\frac{x}{R})^n$.

例. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\sin(nx)}{n^a}$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a(2+3\cos(nx))}{\alpha^n}$.

(1) $\frac{1+2\sin(nx)}{n^a}\le\frac{3}{n^a}$ 对 $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^a}$ 收敛, $\therefore$原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

(2) $\frac{n^a(2+3\cos(nx))}{\alpha^n}\le\frac{5n^a}{\alpha^n}$. 对.

又 $\sqrt[n]{\frac{5n^a}{\alpha^n}}=\frac{\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n^a}}{\alpha}<1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^a}{\alpha^n}$ 收敛.

$\therefore$原函数级数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

1. ① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$, $-1<x<1$.

级数解法. 发现不论是均匀一致收敛.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{e^{nx}}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n\alpha^n)^p}$.

$0<\frac{x^n}{e^{nx}}<\frac{x^n}{(1+x)^n}=(\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{p}}})^p<(\frac{x}{1+\underbrace{n}_{p}x})^p<(\frac{x}{\frac{n}{p}x})^p=\frac{p^p}{n^p}$.

在 $x>0$ 时成立.

$x=0$, 即为0. 故一致收敛.

2. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0\le x<+\infty$ 一致收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 故在 $x\ge0$ 上单调函数,

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 一致收敛.

3. 证明: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 连续, 且有各阶的连续导数.

取 $a>1$, 对 $\forall x\in[a,+\infty)$, $\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^a}$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-x})^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\ln n)^kn^{-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}$

$a>1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}$ 收敛.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-x})^{(k)}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛.

三、幂级数.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$

Sol. 可理解为 $a_n=\frac{1}{2^n}$,

即只有 n^k 项的系数为 $\frac{1}{2^n}$, 其他为0.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}\infty, & |x|>1\\ 0, & |x|<1\end{cases}$.

$\therefore$收敛半径 $R=1$. (绝对).

收敛区间 $(-1,1)$.

收敛域 $[-1,1]$. (验证端点).

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$a_{2n-1}=0$. $a_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)!}$. $\to$ 不系统.

$\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{|(x-2)^{2n+1}|}{(2n+1)!}}{\frac{|(x-2)^{2n-1}|}{(2n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(x-2)^2|}{(2n+1)(2n)}=0<1$.

$\therefore$收敛半径 $R=+\infty$, $(-\infty,+\infty)$.

* 已知收敛半径 & 收敛区域.

例. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

已知 → 讨论.
半径 → 对称

$\frac{|x^{n+1}|^{n^2}}{|x^n|^{n^2}}=|x|^{2n+1}$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x^{2n+1}|}=|x|$.

$R=1$, 在 $(-1,1)$ 上绝对收敛.

当 $x=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $I=(-1,1)$ 上收敛.

当 $x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=1$, 发散. $x=-1$ 收敛

$\therefore$ 在 $I=[-1,1)$ 上收敛.

当 $x=-2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $I=[-1,1]$ 收敛.

例. 分别求 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

收敛半径 $R=1$, 收敛区间 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时, (先在内部可导, 收敛性质).

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$=x(1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{1}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$

其收敛域为 $(-1,1)$. (得到成立范围).

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt$

$=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$.

其收敛域为 $[-1,1)$.

* 令 $x=-1$, $a_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{n}(-1)^{n-1}$.

原级收敛, 交换求和会是.

* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$, 级数在 $x=-1$ 收敛,

则 $a_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 在 $x=-1$ 处右连续.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n3^n}$.

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n\frac{1}{n}$. 比较一般形式

由上知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$, 令 $x=-\frac{1}{3}$. 一般可直取极限.

得原式 $=\ln\frac{4}{3}$.

例. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$ 的和函数 $S(x)$.

$(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3x^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+3x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$=(x^2+3x+1)e^x$.

四、推广些证明.

1. 设 $\alpha>0$, $a_n>0$, $\{a_n\}$ 递增, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

2. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

1. 设 $\alpha>0$, $a_n>0$, $\{a_n\}$ 递增, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

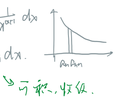
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}(\frac{1}{a_n^{\alpha}}+\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}-\frac{1}{a_n^{\alpha}})$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\times\frac{1}{a_n^{\alpha}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}})$

$\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}(y_n+z_n)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$

$=\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx<\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$.



$=\frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha}$ 收敛 → 可积, 收敛.

$z_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}})\le\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}$. $\alpha>0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}$ 收敛.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}y_n+\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛.

2. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

(⇒) 记 $b_n=\frac{1}{a_n}$, $d_n=a_{n+1}-a_n$.

则有 $b_n>0$, b_n 单减且收敛.

$\{a_n\}$ 有界, $\exists M>0$, 对 $\forall n$, 有 $a_n<M$.

又 a_n 递增, $\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $0<a\le M$.

$\sum_{k=1}^{n}d_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-a_k=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-a_1\le M$ 收敛.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}b_nd_n$, 由 Abel, 收敛.

(⇐) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)$ 收敛, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\to0$.

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{1}{x}dx\ge\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{a_{k+1}}{a_k}=\ln a_n-\ln a_1$.

$\therefore\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}=\ln a_n-\ln a_1$.

$\therefore\ln a_n$ 收敛, a_n 收敛. 即 a_n 有界.

再证必要性.

$\ln(1+x)\le x$, $\therefore\ln(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n})\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$

即 $\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\ln a_{n+1}-\ln a_n\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$.

$\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}$ 收敛.

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$, 对 $\forall p$,

$\left|\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}+\cdots+\frac{\ln a_{n+p+1}-\ln a_{n+p}}{\ln a_{n+p+1}}\right|<\varepsilon$.

$\le\left|\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_1}+\cdots+\frac{\ln a_{n+p+1}-\ln a_{n+p}}{\ln a_1}\right|<\left|\frac{\ln a_{n+p+1}}{\ln a_1}\right|<\varepsilon$.

$\therefore a_{n+p+1}<a_1^{\varepsilon}$. $\{a_n\}$ 有界.

3. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明: 先证充分性.

$\{a_n\}$ 有界且单调递增,

则 $\{a_n\}$ 收敛, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 特别一节课

$\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}}{\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a\cdot a}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}-a_n$ 同敛散.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}-a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-a_k=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-a_1=a-a_1$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}-a_n$ 一样收敛.

再证必要性.

$\ln(1+x)\le x$, $\therefore\ln(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n})\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$

即 $\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\ln a_{n+1}-\ln a_n\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$.

$\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}$ 收敛.

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$, 对 $\forall p$,

$\left|\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}+\cdots+\frac{\ln a_{n+p+1}-\ln a_{n+p}}{\ln a_{n+p+1}}\right|<\varepsilon$.

$\le\left|\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_1}+\cdots+\frac{\ln a_{n+p+1}-\ln a_{n+p}}{\ln a_1}\right|<\left|\frac{\ln a_{n+p+1}}{\ln a_1}\right|<\varepsilon$.

$\therefore a_{n+p+1}<a_1^{\varepsilon}$. $\{a_n\}$ 有界.