1.7习题

2022年1月7日 星期五 上午10:28

1.7 习题课.

1. $I=\int_0^{2\pi}\frac{x|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$ $-\int_0^{\pi}\frac{(2\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$?

$2I=\int_0^{2\pi}\frac{x|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{2\pi}\frac{x|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$

$x=2\pi-x$: $=\int_0^{2\pi}\frac{x|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{2\pi}\frac{(2\pi-x)|\sin(2\pi-x)|}{1+\cos^2(2\pi-x)}d(2\pi-x)$

$=2\pi\int_0^{2\pi}\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=4\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=-4\pi\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{\cos^2 x+1}=-4\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}$

$=2\pi^2$. $I=\pi^2$.

$\int_0^{2\pi}\frac{x|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$

$x=\pi-t$, $t=\pi-x$.

$\int_{\pi}^{-\pi}\frac{(\pi-t)|\sin(\pi-t)|}{1+\cos^2(\pi-t)}d(\pi-t)$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\pi-t)|\sin t|}{1+\cos^2 t}dt$

$=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin t|}{1+\cos^2 t}dt-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t|\sin t|}{1+\cos^2 t}dt$

$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t|\sin t|}{1+\cos^2 t}dt$.

$=-2\pi\int_0^{\pi}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t|\sin t|}{1+\cos^2 t}dt$

$-2\pi\arctan\cos t\Big|_0^{\pi}=-2\pi(\arctan(-1)-\arctan 1)$

$=-2\pi(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=2\pi\times\frac{\pi}{2}=\pi^2$

$\therefore\int_0^{2\pi}\frac{t|\sin t|}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\pi^2}{2}$.

2. $F(x)=\int_1^{2x}\left(\int_{-1}^{3t}\cos(s^2)ds\right)dt$, 求 $F''(x)$.

$=\int_{-1}^{2x}\varphi(t)dt$

$F'(x)=\varphi(2x)\cdot 2=2\int_{-1}^{6x}\cos(s^2)ds$

$F''(x)=2\cos(36x^2)\cdot 6=12\cos 36x^2$.

3. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$.

部分和取极限.

$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1\times3}{2\times1}+\ln\frac{2\times5}{3\times3}+\cdots+\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1\times3}{2\times1}\times\frac{2\times5}{3\times3}\times\cdots\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$ $\ln k-\ln(k+1)$ $+\ln(2k+1)-\ln(2k-1)$

$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2$.

4. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ 的敛散性.   可改为 $n^{\frac{2}{3}}$, n^{α}.. $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$.

$\frac{1}{2n+(-1)^n}\le\frac{1}{2n-1}$, 单减. $\sqrt{\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}}=\frac{-1}{\sqrt{2n+(-1)^n}}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ 收敛.

又 $\left|\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}\right|=\frac{1}{2n+(-1)^n}\ge\frac{1}{2n+1}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散, ∴条件收敛.

$b_n=\frac{(-1)^n}{2n}$

$a_n=\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

$a_n-b_n=-\frac{1}{2n(2n+(-1)^n)}$

$a_n=\underbrace{a_n-b_n}_{绝对}+\underbrace{b_n}_{条件}$

$\Downarrow$

条件.

$\left[a_n=\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}\Rightarrow b_n=\frac{(-1)^n}{2n}\right]$

$a_n-b_n=(-1)^n\frac{-(-1)^n}{2n[2n+(-1)^n]}$

$=-\frac{1}{4n^2+(-1)^n}\sim\frac{1}{4n^2}$.

可得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-b_n$ 绝对收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{(-1)^n}{2n}$ 条件收敛,

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-b_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛

$a_n-b_n=(-1)^n\frac{-(-1)^n}{2n^{\alpha}[2n^{\alpha}+(-1)^n]}$

$=-\frac{1}{4n^{2\alpha}+(-1)^n 2n^{\alpha}}$

$\sim\frac{1}{4n^{2\alpha}}$.

$\alpha>\frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{2\alpha}}$ 绝对.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

5. 试证 $\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}\sim\frac{4}{e}n$. $(n\to+\infty)$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2n(2n-1)\cdots(n+1)}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n\times\cdots\times n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n}{n}\times\frac{2n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{n}{n})(1+\frac{n-1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}$

S_2 数列极限 → Reimann和取极限.

$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{n}{n})+\ln(1+\frac{n-1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})]}$

$=\lim_{n\to\infty}e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=\lim_{n\to\infty}e^{2\ln2-1}=\frac{4}{e}$

S_1. Stirling 公式.

$a_n=\frac{\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}}{n}=\left[\frac{\sqrt{4n\pi}(\frac{2n}{e})^{2n}e^{\frac{\theta}{12n}}}{\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta}{12n}}}\right]^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{(\frac{2n}{e})^2}{\frac{n}{e}}\right)\frac{1}{n}$

$=\frac{4n}{e}\times\frac{1}{n}=\frac{4}{e}$.

6. 常数 $\alpha>0$, $a_n>n^2$, $n\in N^+$.

试证: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln a_n)^{\alpha}}{a_n}$ 收敛.

n 充分大, 有 $0\le\frac{\ln a_n}{a_n}\le\frac{(2\ln n)^{\alpha}}{n^2}$.

$f(x)=\frac{(\ln x)^{\alpha}}{x}$ 在 $(m,+\infty)$ 单调递减.