二阶线性微分方程

2021年12月13日 星期一　　上午10:56

一、定义概念.

1. 设有二阶线性方程(2) $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$. 首系数为1.
及其二阶齐次方程(3) $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.
($x\in$ 开区间 I, $p(x)$. $q(x)$. $f(x)$ 在 I 中连续).

2. 函数组的 Wronski 行列式.

$\varphi_1(x).\ \varphi_2(x) \to \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$.

$\varphi_1(x).\ \varphi_2(x).\ \varphi_3(x) \to \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) \end{vmatrix}$

二、性质定理.

1. $\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \\ y(x_0)=\alpha.\ y'(x_0)=\beta. \end{cases}$
在开区间 I 中 ∃ 唯一解 $y(x)$.

2. 叠加原理, 齐次 & 非齐次解的关系.

3. 齐次方程(3)一定存在 2 个基本解组 $\{y_1(x), y_2(x)\}$。两者线性相关 <=> Wronski 行列式在 I 上恒为零.

4. 齐次方程(3)两个解 $y_1(x)$. $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式可表示为 Liouville 公式

$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.　($\forall x_0\in I$)

证明: 记 $\vec{y}=(y_1(x), y_2(x))$, 二维行向量.

$W(x)=\begin{vmatrix}\vec{y}\\ \vec{y}'\end{vmatrix}$. $W'(x)=\begin{vmatrix}\vec{y}'\\ \vec{y}'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{y}\\ \vec{y}''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{y}\\ \vec{y}''\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\vec{y}\\ -p(x)\vec{y}'-q\vec{y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{y}\\ -p\vec{y}'\end{vmatrix}=-p\begin{vmatrix}\vec{y}\\ \vec{y}'\end{vmatrix}$

$=-p(x)W(x)$.

通解 $W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$

两边取 x_0, $W(x_0)=C$.

$\therefore W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.

* 只要 $W(x_0)=0$, 则 $W(x)$ 恒为零.
$W(x_0)\neq 0$, 则 $W(x)$ 恒不为零. $e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}>0$.

5. 若 $y_1(x)$. $y_2(x)$ 是齐次方程(3)的一对线性无关解(基本解组), 则它们的 Wronski 行列式处处不为零. 该方程的任何一个解可表示为 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. 齐次通解.

=> 非齐次方程(2)的通解可表示为
$y(x)=y_1(x)+y_2(x)+\tilde{y}(x)$　($\tilde{y}(x)$ 为(2)的特解).

6. 如果 $y_1(x)$ 是(3)的一个非零解, 则(2)的另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解 $y_2(x)$ 可取成
$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$.

证明: $\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)'=\frac{y_2'y_1-y_1'y_2}{y_1^2}=\frac{W(x)}{y_1^2}=\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}$

$\therefore y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$

例. 已知 $y_1=\cosh x$ 是 $y''-y=0$ 的一解. 求该方程的基本解组.

原方程另一个与 $\cosh x$ 线性无关解为 $y_2(x)$.

$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$

$=\cosh x\int\frac{1}{\cosh^2x}e^{-\int 0dx}dx$

$=\cosh x\int\frac{1}{\cosh^2x}dx=\cosh x\tanh x=\sinh x$.

即另一个……为 $\sinh x$.

* $\cos x$. $\sin x$ 是 $y''+y=0$ 的基本解组.

三、常数变易法.

1. 如果 $y_1(x)$. $y_2(x)$ 为(3)的一个基本解组, 又 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, 则(2)的特解 $\tilde{y}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, $C_1(x)$. $C_2(x)$ 满足

$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$

证明: $\tilde{y}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)=C\cdot y$ → 内积.
并令 C_1. C_2 满足 $C'\cdot y=C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0$.
$\tilde{y}'=C'\cdot y+C\cdot y'=C\cdot y'$, $\tilde{y}''=C'\cdot y'+C\cdot y''$
代入原非齐次方程.
$C'y'+Cy''+pC\cdot y'+qC\cdot y=f(x)$.
$C'y'+C\cdot(y''+py'+qy)=f(x)=C'\cdot y'$.

(二) 求 1° 特解 y^* 的常数变易法

令 $z(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ 是 1° 的解

$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0$

$z'(x)=C_1'y_1+C_2'y_2+C_1y_1'+C_2y_2'$　令 $C_1'y_1+C_2'y_2=0$ $(*_1)$

$\Rightarrow z'(x)=C_1y_1'+C_2y_2'$, $z''=C_1'y_1'+C_2'y_2'+C_1y_1''+C_2y_2''$

代入 1°, 有 $C_1'y_1'+C_2'y_2'+C_1y_1''+C_2y_2''+a(C_1y_1'+C_2y_2')+b(C_1y_1+C_2y_2)=f(x)$

将 $y_1''+ay_1'+by_1=0$、$y_2''+ay_2'+by_2=0$ 代入

$\Rightarrow \begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 & (*_1) \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x) & (*_2) \end{cases}$

这是一个二元一次方程组

系数行列式: $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0$, 由 Cramer 法则

$C_1'(x)=\frac{D_1}{W(x)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)}$

$C_2'(x)=\frac{D_2}{W(x)}=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$

积分, 得 $y^*(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(s)y_2(x)-y_2(s)y_1(x)}{W(s)}f(s)ds$　注意分子: $y_1(s)y_2(x)-y_2(s)y_1(x)$

$y=\underbrace{\bar{y}}_{\text{齐通解}}+\underbrace{y^*}_{\text{非齐特解}}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(s)y_2(x)-y_2(s)y_1(x)}{W(s)}f(s)ds$

2. 例. 已知 $\{e^x, x\}$ 是非齐次方程($x>1$) $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的齐次方程的一个基本解组. 试计算原非齐次方程的特解.

解. 由常数变易法, 特解 $\tilde{y}(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)x$.
且 $C_1(x)$. $C_2(x)$ 满足 $\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)x=0 \\ C_1'(x)e^x+C_2'(x)=x-1. \end{cases}$
解得 $C_2'(x)=-1$, $C_1'(x)=\frac{x}{e^x}$.
得 $C_1(x)=\int\frac{x}{e^x}d(x)=-(x+1)e^{-x}$, $C_2(x)=-x$.
∴ 非齐次方程一个特解 $\tilde{y}(x)=-(x+1)-x^2$

四、二阶常系数齐次线性微分方程

1. 形式: $y''+py'+qy=0$.

2. 解法. 指数函数 $e^{\lambda_0 x}$ 是该方程的解
<=> λ_0 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根.

证明: $y^{(n)}=(e^{\lambda_0x})^{(n)}=\lambda_0^ne^{\lambda_0x}$.
∴ 对 $y''+py'+qy=0$,
有 $e^{\lambda_0x}(\lambda_0^2+p\lambda_0+q)=0$.

特征根状况	方程基本解组
相异实根 λ_1. λ_2.	$\{e^{\lambda_1x}, e^{\lambda_2x}\}$. ($W(x)\neq0$, 线性无关)
二重实根 λ_0.	$\{e^{\lambda_0x}, xe^{\lambda_0x}\}$. $T(\lambda)=\lambda^2-2\lambda_0\lambda+\lambda_0^2$ $y''-2\lambda_0y'+\lambda_0^2y=0$, $y_1(x)=e^{\lambda_0x}$. $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx=xe^{\lambda_0x}$.
共轭复根 $\alpha\pm i\beta$	$\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$. $y_1(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ $y_2(x)=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$ $\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x$. 也线性无关, 构成一组基.

3. 例. 求下列方程基本解组.
(1) $y''+y=0$.
特征多项式 $T(\lambda)=\lambda^2+1$.
特征根为共轭复根 $\lambda_1=i$. $\lambda_2=-i$.
基本解组为 $\cos x$. $\sin x$.
(2) $y''+2y'+y=0$.
特征多项式 $T(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$.
特征根二重根 $\lambda_0=-1$.
基本解组为 $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$.

例: 求 $y'''-3\lambda_0y''+3\lambda_0^2y'-\lambda_0^3y=0$ 的通解.
$T(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^3$ 为特征多项式.
积分因子法: $e^{-\lambda_0x}$ 同乘.
得 $(e^{-\lambda_0x}y)'''=0$, 原方程的解为
$y=e^{\lambda_0x}(C_0+C_1x+C_2x^2)$

例. 求方程基本解组.
(1) $y''-a^2y=0$
(2) $y''+4y'+13y=0$.
(2) 特征根 $\lambda=-2\pm3i$.
基本解组 $e^{-2x}\cos3x$. $e^{-2x}\sin3x$.

五、二阶线性非齐次微分方程.

1. 对于对应非齐次方程, 若 $P_n(x)$ 是 n 次多项式, 则方程 $y''+py'+qy=P_n(x)$ 有特解形如 $\tilde{y}=x^s(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)$
其中 s 是 0 作为特征根的重数,
a_i 可用待定系数算出.

例: 求下述方程多项式特解.
(1) $y''-2y'+y=x^2-4x$
(2) $y''+y'=4x+1$.

(1) x 两次 → 有特解形如 $\tilde{y}=ax^2+bx+c$.
将 y 代入原方程　(经待定系数得)
$2a-2(2ax+b)+ax^2+bx+c=x^2-4x$
$ax^2+(b-4a)x+c-2b+2a=x^2-4x$.
解得 $a=1$. $b=0$. $c=-2$.
∴ 原方程特解为 $\tilde{y}=x^2-2$.

(2) 观察: ① 0 为 $T(\lambda)=\lambda^2+\lambda$ 一重根, $s=1$.
② x 有一次, 左边都是导, y 最高 2 次.
③ 左边都是导, 常数可有可无.
方程有特解形如 $\tilde{y}=x(ax+b)$
将 $\tilde{y}$ 代入方程, 经待定系数得
$\tilde{y}=2x^2-3x$.

2. 常系数线性方程 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\lambda_0x}$
经代换 $y=ze^{\lambda_0x}$ 后转化为常微方程
$z''+p_1z'+q_1z=P_n(x)$. 其中新旧两个方程特征多项式之间满足平移关系.

例. 求 $y''-3y'+2y=36xe^{-x}$ 的特解.
$e^xy''-3e^xy'+2e^xy=36x$.
令 $z=e^xy$, $z''-3z'+2z=36x$.
$T(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$, $\tilde{z}=ax+b$.
$3a-2(3ax+b)=36x$,
$a=6$, $b=-9$. $y=(6x-9)e^{-x}$
- - - - - - - - - - - -
变量代换 $y=ze^{-x}$. 代入得
$z''e^{-x}-2z'e^{-x}+ze^{-x}-3(z'e^{-x}-ze^{-x})+2ze^{-x}=36xe^{-x}$
∴ $z''-6z'+5z=36x$.
待定系数得 $\tilde{z}=6x+5$.
则 $\tilde{y}=\tilde{z}e^{-x}=(6x+5)e^{-x}$.
∴ 原方程通解 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(6x+5)e^{-x}$.

* $T_y(s)=s^2-3s+2$. $e^{-x}\to\lambda_0=-1$.
$T_z(\lambda)=T_y(s)|_{s=\lambda-1}$ 平移.
$=(\lambda-1)^2-3(\lambda-1)+2=\lambda^2-5\lambda+6$.

3. 常系数线性方程
i) $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$.
ii) $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.
iii) $y''+py'+qy=P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$.
则辅助方程 iii) 的一个复值函数特解的实虚部, 分别为其实虚部方程 i). ii) 的一个特解.

例. 求 $y''+y=2\sin\frac{x}{2}$ 的一个特解 $\tilde{y}$.
[观察可得 $\tilde{y}=a\sin x$, 待定系数.]
原方程是如下辅助方程的虚部
$y''+y=2e^{i\frac{x}{2}}$.
则用平移变换 $y=ze^{i\frac{x}{2}}$,
$T_y=\lambda^2+1$, $T_z=\lambda^2+1|_{\lambda\to\lambda-\frac{i}{2}}=(\lambda+\frac{i}{2})^2+1$
得 z 满足 $z''+iz'+\frac{3}{4}z=2$.
观察得特解 $\tilde{z}=\frac{8}{3}$, $\tilde{y}_0=\frac{8}{3}e^{i\frac{x}{2}}$.
按 Euler 公式, $\tilde{y}_0=\frac{8}{3}(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})$.
$\tilde{y}_0$ 的虚部为原方程的解 $\tilde{y}=\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}$.