# 一阶微分方程

2021年12月10日 星期五　　上午9:31

一、定义.

1. 引例. 求未知函数 $s(t)$.

$$\begin{cases} s''(t)=a & ① \\ s(0)=s_0,\ s'(0)=v_0 & ② \end{cases}$$

对①求两次不定积分.

$s''(t)=a$, $s'(t)=at+C_1$, $s(t)=\frac{1}{2}at^2+C_1t+C_2$

令 $t=0$, 得 $C_1=v_0$, $C_2=s_0$.

$\therefore s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$.

2. 联系自变量 $x$ 与未知函数 $y$ 及其各阶微商的方程 $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$.

通解含有 $n$ 个待定常数(特值决定).

二、计算.

1. 分离变量

可分离变量的方程: $\frac{dy}{dx}=F(x,y)=g(x)h(y)$.

分离变量法: $\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+C$.

例. 求解 $\frac{dy}{dx}=(1+y^2)e^{-x}$.

分离得 $\frac{dy}{(1+y^2)}=e^{-x}dx$.

两端不定积分, 原方程的通解为

$\int\frac{dy}{(1+y^2)}=\int e^{-x}dx+C$ (未具体化),

即 $\arctan y=-e^{-x}+C$. (具体化).

2. 变量代换.

① 齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 经变量代换 $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$, 转化为分离变量型方程.

$\varphi(u)=\varphi(\frac{y}{x})=\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, $\frac{dx}{x}=\frac{du}{\varphi(u)-u}$.

若 $\Phi(u,x,C)=0$ 是原方程的通解,

则 $\Phi(\frac{y}{x},x,C)=0$ 即为关于 $x$, $y$ 的解.

② 方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(ax+by+c)$ 经变量代换 $u=ax+by+c$ 后, 转化为分离变量型方程.

$\frac{du}{dx}=\frac{d(ax+by+c)}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}=a+b\varphi(u)$.

例. 求 $\frac{dy}{dx}=3(3x+y-1)^2$.

令 $u=3x+y-1$, 则 $\frac{du}{dx}=3+\frac{dy}{dx}=3+3u^2$.

$\frac{du}{3(1+u^2)}=dx$, $\frac{1}{3}\arctan u=x+C_0$. 原方程通解

$u=\tan(3x+C)$, $y=\tan(3x+C)-3x+1$. 新C为积分曲线簇.

例. $(1+x^2)y\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

$(1+x^2)y\,dy=-\sqrt{1-y^2}\,dx$,

$y\neq\pm1$ 时, $-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{dx}{1+x^2}$.

两端不定积分, $-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy^2=\int\frac{1}{1+x^2}dx$,

$\sqrt{1-y^2}=\arctan x+C$.

另外, $y=\pm1$ 也为原方程的解.

例. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$. 令 $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$,

两端对 $x$ 求导, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$.

$\therefore\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx$. $\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{x}dx+C$.

$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln|x|+C$.

原方程通解为 $\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)=\ln|x|+C$.

$\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)(x^2)+C=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$

$\sqrt{x^2+y^2}=C_0e^{\arctan\frac{y}{x}}$, $C_0=e^{-C}$. 待定C变换注释.

(2) 对 $\begin{cases}x+y-3=0\\x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$, 是(1)平移变换

可重写为 $\frac{d(y-1)}{d(x-2)}=\frac{(x-2)+(y-1)}{(x-2)-(y-1)}$

故利用(1)的通解, 可得原方程的通解为 $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=C\cdot e^{\arctan\frac{y-1}{x-2}}$.

※ $\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

$|A|=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 时,

解 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$ (唯一解)

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{d(y-y_0)}{d(x-x_0)}=f(\frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)})$

$\therefore\frac{dy}{dv}=f(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v})$.

三、一阶线性微分方程.

齐次: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$.

非齐次: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$.

1. 对齐次方程.

$S_1$ 分离变量有 $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$

$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$, $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ $(C=\pm e^{C_1})$

$S_2$ 积分因子有 $e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=0$

$\therefore(e^{\int P(x)dx}y)'=0$, $e^{\int P(x)dx}y=C$.

$\therefore y=Ce^{-\int P(x)dx}$ 为原方程通解.

2. 对非齐次方程

$S_1$ 常数变易有 $\tilde{y}=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ (待定)

$\frac{d\tilde{y}}{dx}+P(x)\tilde{y}=Q(x)$,

$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))+C(x)e^{-\int P(x)dx}(P(x))=Q(x)$

$\therefore\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$,

积分得 $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$.

$\therefore y=e^{-\int P(x)dx}[\int e^{\int P(x)dx}\cdot q(x)dx+C]$ 为通解.

$S_2$ 积分因子有 $\frac{d(ye^{\int P(x)dx})}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$

$\therefore$ 积分得 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C]$.

例. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=x^2\csc x$ $(x\neq k\pi)$ / $(x\in(0,\pi))$

代公式. $y=e^{-\int\cot x\,dx}[\int e^{\int\cot x\,dx}x^2\csc x\,dx+C_0]$

$-\int\cot x\,dx=-\int\frac{d\sin x}{\sin x}=-\ln|\sin x|$.

$\therefore y=\frac{1}{|\sin x|}[\int|\sin x|x^2\cdot\frac{1}{\sin x}dx+C_0]$　$(\operatorname{sgn}u)u=|u|$, $u=(\operatorname{sgn}u)|u|$.

$=\frac{1}{(\operatorname{sgn})\sin x}[(\operatorname{sgn})\int\sin x\cdot x^2\frac{1}{\sin x}dx+C_0]$

$=\frac{1}{\sin x}[\int x^2dx+C_0]=\frac{1}{\sin x}(\frac{1}{3}x^3+C)$.

例. $(2y^2+y-x)dy-y\,dx=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y^2+y-x}$, $\frac{dx}{dy}=2y+1-\frac{x}{y}$.

3. 伯努利方程: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=q(x)y^n$.

两端乘上因子 $(1-n)y^{-n}$, 得到

$\frac{\frac{(1-n)}{y^n}dy}{dx}=\frac{d(y^{1-n})}{dx}$, $\frac{d(y^{1-n})}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)q(x)$

$\therefore$ 通解 $y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}(\int e^{\int(1-n)P(x)dx}(1-n)q(x)dx+C)$.

例. $\frac{dy}{dx}-y\tan x=y^2\cos x$. $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$

同乘 $-\frac{1}{y^2}$, $\frac{d(y^{-1})}{dx}+\tan x(y^{-1})=-\cos x$.

$y^{-1}=e^{-\int\tan x\,dx}(\int e^{\int\tan x\,dx}(-\cos x)dx+C_0)$

$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln|\cos x|$

$=|\cos x|(\int\frac{1}{|\cos x|}\cos x\,dx+C_0)$

$=\cos x(\int\cos^2x\,dx+C)$　$=\cos x(-x+C)$

$=\cos x(\int\frac{1-\cos2x}{2}dx+\cancel{C})$

$=\frac{1}{2}x\cos x-\cos x\cos2x+C_0\cos x$.

补解: $y=0$

四. 可降阶的微分方程.

1. $F(x,y',y'')\Rightarrow F(x,p,p')$.

2. $F(y,y',y'')\Rightarrow F(y,p,\frac{dp}{dx})=(y,p,p\frac{dp}{dy})$

例. $\begin{cases}xy''+y'=4x\\y(1)=2,\ y'(1)=1.\end{cases}$ $(x>0)$

令 $p=y'$, $x\frac{dp}{dx}+p=4x$. $(xp)'=4x$.

$\frac{dp}{dx}+\frac{p}{x}=4$. $u=\frac{p}{x}$. $\frac{dux}{dx}+u=4$.

$u\frac{du}{dx}=4-u$. $\frac{u}{4-u}du=dx$.

$-\frac{u}{u-4}du=dx$. $-(1+\frac{4}{u-4})du=dx$.

$-u-4\ln|u-4|=\ln|x|+C$.

$xp=\int4x\,dx+C$, $xp=2x^2+C_1$

令 $x=1$, $p=y'(1)=1$, $C_1=-1$. 尽快定解. 减少变量 $C_1$.

$\therefore\frac{dy}{dx}=2x-\frac{1}{x}$, $y=\int2x-\frac{1}{x}dx+C_2$,

$y=x^2-\ln x+C_2$. 代入 $x=1$, $C_2=1$.

$\therefore$ 原特解为 $y=x^2-\ln x+1$.

例. $\begin{cases}y''-e^{2y}=0\\y(0)=0,\ y'(0)=1.\end{cases}$

令 $p=y'$, $p\frac{dp}{dy}=e^{2y}$, $p\,dp=e^{2y}dy$

$\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}e^{2y}+C_1$. 令 $x=0$, $y=1$, $p=1$, $C_1=0$.

$\therefore(\frac{dy}{dx})^2=e^{2y}$. $\frac{dy}{dx}=e^y$. $(p=y'>0)$.

$\therefore e^{-y}dy=dx$, $-e^{-y}=x+C_2$. $C_2=-1$

$\therefore -e^{-y}=x-1$, $y=-\ln(1-x)$.

例. $y'=\cos(x-y)$.

$y'-1=\cos(x-y)-1$. $\frac{d(y-x)}{dx}=\cos(y-x)$.

$\Rightarrow\frac{du}{dx}=\cos u$, $\frac{1}{\cos u}du=dx$.