亿些计算

2022年1月12日 星期三　　下午3:50

1. (1.37) $y''+4y=9x\sin x$ 的通解.

S_1 $y''+4y=9x\sin x$.

对齐次方程 $y''+4y=0$,

特征方程 $\lambda^2+4=0$, $\lambda^2=-4$, $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$.

$\therefore y_1(x)=\cos 2x$, $y_2(x)=x\cos 2x$.

$\therefore$ 齐次方程通解 $y_0(x)=C_1\cos 2x+C_2x\cos 2x$.

对非齐方程 $y''+4y=9x\sin x$,

设 $ax\sin x+bx\cos x+c\sin x+d\cos x=y$.

$y'=a(\sin x+x\cos x)+b(\cos x-x\sin x)+c\cos x-d\sin x$

$=(a-d)\sin x+(b+c)\cos x+ax\cos x-bx\sin x$.

$y''=(a-d)\cos x-(b+c)\sin x+a(\cos x-x\sin x)-b(\sin x+x\cos x)$

$=(2a-d)\cos x-(2b+c)\sin x-ax\sin x-bx\cos x$.

$y''+4y=9x\sin x$,

$3ax\sin x+3bx\cos x+(2a+3d)\cos x+(3c-2b)\sin x=9x\sin x$.

$\therefore \underline{a=3}$, $b=0$, $c=0$, $d=-\frac{2}{3}a=-2$.

$\therefore$ 特解 $y=\cancel{2}\,3x\sin x-2\cos x$.

$\therefore$ 非齐次方程通解为 $y(x)=C_1\cos 2x+C_2x\cos 2x+\cancel{9}\,3x\sin x-2\cos x$.

$\beta=1$. e^{ix}.

$z=ax+b$. $z''=0$

S_2 $y''+4y=9x\sin x$.

$\lambda^2+4=0$, $\lambda=\pm 2i$.

齐通解 $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$.

$y=ze^{ix}$, $y'=z'ie^{ix}$, $y''=-z''e^{ix}$

$-z''e^{ix}+4ze^{ix}=9xe^{ix}$

$-z''+4z=9x$, $z=ax^2+bx+c$.

$-2a+4ax^2+4bx+4c=9x$,

$a=0$, $c=0$, $b=\frac{9}{4}$. $z=\frac{9}{4}x$

$\therefore$ 特解 $y=\frac{9}{4}xe^{ix}\Rightarrow y=\frac{9}{4}x\sin x$.

S_3 $y''+4y=9x\sin x$.

$\lambda^2+4=0$, $\lambda=\pm 2i$.

齐通解 $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$.

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x=0\\ -C_1'(x)2\sin 2x+C_2'(x)2\cos 2x=9x\sin x\end{cases}$$

$C_1'(x)=-C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$2C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+C_2'(x)2\cos 2x=9x\sin x$

$C_2'(x)=\dfrac{9x\sin x}{2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+2\cos 2x}$

$W(x)=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=2\cos^2 2x+2\sin^2 2x=2$.

$y^*=\int\frac{\cos 2t\sin 2x-\sin 2t\cos 2x}{2}\times 9t\sin t\,dt$

$=\frac{9}{2}\int(\cos 2t\sin 2x-\sin 2t\cos 2x)t\sin t\,dt$

$=\frac{9}{2}\sin 2x\underline{\int t\sin t\cos 2t\,dt}-\frac{9}{2}\cos 2x\underline{\int t\sin t\sin 2t\,dt}$

$\int t\sin t\cos 2t\,dt$　　$\int t\sin t\sin 2t\,dt$.

(1.36)

2. (10 分) 已知曲线 $y=y(x)$ 经过原点, 且在原点的切线平行直线 $2x-y-5=0$, 而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$, 求曲线 $y=y(x)$.

经过原点, $y(0)=0$.

切线与 $y=2x-5$ 平行, $y'(0)=2$.

$y''-6y'+9y=e^{3x}$.

对应齐次方程 $(\lambda-3)^2=0$, $\lambda=3$.

$\therefore$ 齐次方程的解为 $y_1(x)=e^{3x}$, $y_2(x)=xe^{3x}$.

S_1 $y=zx^2e^{3x}$, $y'=z'(2xe^{3x}+3x^2e^{3x})$ $=2xe^{3x}+3x^2e^{3x}$

$y''=z''(2e^{3x}+2\times 3xe^{3x}+3\times(2xe^{3x}+3x^2e^{3x}))$

$=z''(2e^{3x}+12xe^{3x}+9x^2e^{3x})$ $=2e^{3x}+12xe^{3x}+9x^2e^{3x}$ 求导.

~~$y''-6y'+9y=9z-18z+9z$~~

$y''-6y'+9y=e^{3x}$.

$y=ze^{3x}$. $y'=3z'e^{3x}$. $y''=9z''e^{3x}$.

$9z''e^{3x}-18z'e^{3x}+9ze^{3x}=e^{3x}$

$9z''-18z'+9z=1$,

$z''-2z'+z=\frac{1}{9}$.

S_2 $\tilde{y}(x)=C_1(x)e^{3x}+C_2(x)xe^{3x}$.

$W(x)=\begin{vmatrix}e^{3x} & xe^{3x}\\ 3e^{3x} & (1+3x)e^{3x}\end{vmatrix}=e^{6x}(1+3x-3x)=e^{6x}$

$\tilde{y}(x)=\int\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W(s)}f(s)\,ds$

$=\int\frac{e^{3s}\times xe^{3x}-e^{3x}se^{3s}}{e^{6s}}\times e^{3s}\,ds$

$=\int xe^{3x}-se^{3x}\,ds$

$=x^2e^{3x}-\frac{1}{2}x^2e^{3x}=\frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

S_3 $\begin{cases}C_1'(x)\cancel{e^{3x}}+C_2'(x)x\cancel{e^{3x}}=0\\ 3C_1'(x)\cancel{e^{3x}}+C_2'(x)(1+3x)\cancel{e^{3x}}=\cancel{e^{3x}}\ 1\end{cases}$　$C_1'(x)=-xC_2'(x)$

$-3xC_2'(x)+C_2'(x)(1+3x)=1$, $C_2'(x)=1$.

$C_2(x)=x$. $C_1'(x)=-x$, $C_1(x)=\frac{1}{2}x^2$.

$\therefore$ 特解 $\frac{1}{2}x^2+x$.

通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

$2xe^{3x}+3x^2$

$y(0)=C_1=0$,

$y'(0)=3C_1e^{3x}+(3x+1)C_2e^{3x}+(x+\frac{3}{2}x^2)e^{3x}$

$=3C_1+C_2=2$.　$C_2=2$.

$\Rightarrow y=2xe^{3x}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

3. (1.35) $y''-3y'+2y=2x-3$ 通解.

S_1 齐次 $y''-3y'+2y=0$. $y_1=e^x$. $y_2=e^{2x}$

非齐次 $y''-3y'-2y=2x-3$, $y=ax^2+bx+c$. $y'=2ax+b$. $y''=2a$.

$2a-3ax-3b-2ax^2-2bx-2c=2x-3$.

$-2ax^2-(3a+2b)x+2a-3b-2c=2x-3$.

$a=0$. $-2b=2$, $b=-1$. $3-2c=-3$, $c=3$.

$\therefore$ 特解 $y^*=-x+3$. $b=1$. $c=0$.

S_2 $\begin{cases}C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{2x}=0\\ C_1'(x)e^x+2C_2'(x)e^{2x}=2x-3\end{cases}$

$W(x)=\begin{vmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^{2x}\end{vmatrix}=e^{3x}$.

$y^*=\int\frac{e^te^{2x}-e^xe^{2t}}{e^{3t}}(2t-3)\,dt$

$=\int\frac{e^{2x}}{e^{2t}}(2t-3)\,dt-\int\frac{e^x}{e^t}(2t-3)\,dt$

$=e^{2x}\int(2t-3)e^{-2t}\,dt-e^x\int(2t-3)e^{-t}\,dt$

$=e^{2x}\left(2\int te^{-2t}\,dt-3\int e^{-2t}\,dt\right)$

$-e^x\left(2\int te^{-t}\,dt-3\int e^{-t}\,dt\right)$

$=\cancel{e^{2x}}\left(2\times(-\frac{1}{2})\cancel{e^{-2x}}(x+\frac{1}{2})+3\times\frac{1}{2}\cancel{e^{-2x}}\right)$

$-\cancel{e^x}\left(2\times(-1)\cancel{e^{-x}}(x+1)+3\times\cancel{e^{-x}}\right)$

$=-(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}-(-2(x+1)+3)$

$=-x+1+2(x+1)-3=x$

$=-\frac{1}{2}\int m\,de^{-m}$

$=-\frac{1}{2}(me^{-m}-\int e^{-m}dm)$

$=-\frac{1}{2}(me^{-m}+e^{-m})$

$\int xe^{ax}dx$

$=\frac{1}{a}\int x\,de^{ax}$

$=\frac{1}{a}(xe^{ax}-\int e^{ax}dx)$

$=\frac{1}{a}(xe^{ax}-\frac{1}{a}e^{ax})$

$=\frac{1}{a}e^{ax}(x-\frac{1}{a})$.

(3) $y_1(x)=e^x$　$y_2(x)=e^{2x}$

$W(x)=e^x\cdot 2e^{2x}-e^xe^{2x}=e^{3x}$

$y^*(x)=\int\frac{e^se^{2x}-e^{2s}e^x}{e^{3s}}(2s-3)\,ds$

$=\int\frac{2s-3}{e^{2s}}e^{2x}ds-\int\frac{2s-3}{e^s}e^xds$

$=\left(\frac{1}{2}\frac{-2x-1}{e^{2x}}+\frac{1}{2}\frac{3}{e^{2x}}\right)e^{2x}-\left(\frac{-2x-2}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e^x$

$=-x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2x+2-3=\cancel{x-2}$. x

S_3 $y''-3y'+2y=2x-3$.

对齐次方程 $y''-3y'+2y=0$,

特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

$\therefore y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$.

即齐次方程的通解为 $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

对非齐次方程 $y''-3y'+2y=2x-3$.

$$\begin{cases}C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{2x}=0\\ C_1'(x)e^x+2C_2'(x)e^{2x}=2x-3.\end{cases}$$

解得 $C_1'(x)=-(2x-3)e^{-x}$,

$C_2'(x)=(2x-3)e^{-2x}$.

$C_1'(x)e^x=-C_2'(x)e^{2x}=-(2x-3)$

$C_2'(x)\cancel{e^{2x}}=(2x-3)e^{-2x}$

$\int-(2x-3)e^{-x}dx$

$=2\int(x-\frac{3}{2})\,de^{-x}$

$=2(e^{-x}(x-\frac{3}{2})-\int e^{-x}d(x-\frac{3}{2}))$

$=2e^{-x}(x-\frac{3}{2})-2\int e^{-x}dx$

$=2e^{-x}(x-\frac{3}{2})+2e^{-x}$

$\int(2x-3)e^{-2x}dx$

$=-\frac{1}{2}\int(2x-3)\,de^{-2x}$

$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}(2x-3)-\int e^{-2x}d(2x-\cancel{3}))$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x-3)+\frac{1}{2}e^{-2x}$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x-4)$

$\therefore C_1(x)=\int-(2x-3)e^{-x}dx=e^{-x}(2x-1)$

$C_2(x)=\int(2x-3)e^{-2x}dx=-e^{-2x}(x-2)$.

$\therefore$ 原齐次方程的特解为 $\tilde{y}(x)=2x-1+2-x=\cancel{x+1}$ $x-2$

$\therefore$ 原齐次方程的通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+x+1$.