例题 重开

2021年12月10日 星期五 下午12:18

一、一阶微分方程

例. 求解 $\frac{dy}{dx}=3(3x+y-1)^2$.

例. $(1+x^2)y\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$

例. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$.

二、二阶微分方程

例. 已知 $y_1=\cosh x$ 是 $y''-y=0$ 的一解. 求该方程的基本解组.

例. 已知 $\{e^x, x\}$ 是非齐次方程 $(x\neq1)$ $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的齐次方程的一个基本解组，试计算该非齐次方程的特解.

例. 求 $y'''-3\lambda_0 y''+3\lambda_0^2 y'-\lambda_0^3 y=0$ 的通解.

例. 求 $\frac{dy}{dx}=3(3x+y-1)^2$.

令 $u=3x+y-1$，则 $\frac{du}{dx}=3+\frac{dy}{dx}=3+3u^2$.

$\frac{du}{3(1+u^2)}=dx$, $\frac13\arctan u=x+C$. 原方程通解

$u=\tan(3x+C)$, $y=\tan(3x+C)-3x+1$. 正C为积分曲线族.

例. $(1+x^2)y\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

$(1+x^2)y\,dy=-\sqrt{1-y^2}\,dx$

$y\neq\pm1$ 时, $-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{dx}{1+x^2}$

两端不定积分, $-\int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\int\frac{1}{1+x^2}dx$,

$\sqrt{1-y^2}=\arctan x+C$.

另外, $y=\pm1$ 也为原方程的解.

例. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$. 令 $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$,

两端对 x 求导, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$

$\therefore \frac{1-u}{1+u^2}du=\frac1x dx$. $\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac1x dx+C$.

$\arctan u-\frac12\ln(u^2+1)=\ln|x|+C$.

原方程通解为 $\arctan\frac{y}{x}-\frac12\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)=\ln|x|+C$.

$\arctan\frac{y}{x}=\frac12\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)(x^2)+C=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$

$\sqrt{x^2+y^2}=C_0e^{\arctan\frac{y}{x}}$, $C_0=e^{-C}$. 待定c直接放入通解.

(2) 对 $\begin{cases}x+y-3=0\\x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，是(1)平移变换

可重写为 $\frac{d(y-1)}{d(x-2)}=\frac{(x-2)+(y-1)}{(x-2)-(y-1)}$

故利用(1)的通解，可得原方程的通解为 $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=C\cdot e^{\arctan\frac{y-1}{x-2}}$.

※ $\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

$|A|=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 时,

解 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$ (唯一解)

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d(y-y_0)}{d(x-x_0)}=f(\frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)})$

$\therefore \frac{du}{dv}=f(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v})$.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$.

令 $x+2y=u$. $\frac{dy}{dx}=\frac{2u+3}{u+1}$.

$\frac{du}{dx}=\frac{d(x+2y)}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=\frac12\frac{du}{dx}-\frac12$

$\therefore \frac{du}{dx}-1=\frac{4u+6}{u+1}$, $\frac{du}{dx}=\frac{5u+7}{u+1}$

$\frac{u+1}{5u+7}du=(\frac{u+\frac75-\frac25}{5u+7})du=(\frac15-\frac{\frac25}{5u+7})du$

$=\frac15du-\frac15\times\frac{\frac25}{5u+7}d(5u+7)=\frac15u-\frac{2}{25}\ln|5u+7|=x+C$

$\therefore \frac15(x+2y)-\frac{2}{25}\ln|5x+10y+7|=x+C_0$

$10x-5y+2\ln|5x+10y+7|=C$, $C=25C_0$

2. (1) $y'=\cos(x-y)$.

$y'-1=\cos(x-y)-1=\cos(y-x)-1$.

令 $y-x=t$, 则 $\frac{dt}{dx}=\cos t-1$.

$\frac{dt}{\cos t-1}=dx$. $\therefore \cot\frac{t}{2}+C=x$. $x=\cot\frac{y-x}{2}+C$.

补充 $\cos t-1=0$, $y=x+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

(2) $y'\sin y+x\cos y+x=0$

令 $u=\cos y$, $u'=-\sin y\cdot y'$.

$-\frac{du}{dx}+xu+x=0$, $\frac{du}{dx}-xu-x=0$.

$u=e^{\int x dx}(\int e^{-\int x dx}(-x)dx+C)$

$=e^{\frac12x^2}(\int e^{-\frac12x^2}(-x)dx+C)$

$=-e^{\frac12x^2}(\int e^{-\frac12x^2}d(\frac12x^2)+C)$

$=-e^{\frac12x^2}\times e^{-\frac12x^2}-e^{\frac12x^2}C=-1+Ce^{\frac12x^2}$.

$\therefore y=\arccos(-1+Ce^{\frac12x^2})$.

补解 $y=\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

例. 已知 $y_1=\cosh x$ 是 $y''-y=0$ 的一解. 求该方程的基本解组.

原方程另一个与 $\cosh x$ 线性无关解为 $y_2(x)$.

$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$

$=\cosh x\int\frac{1}{\cosh^2x}e^{-\int0dx}dx$

$=\cosh x\int\frac{1}{\cosh^2x}dx=\cosh x\tanh x=\sinh x$.

即另一个解为 $\sinh x$.

$\therefore \cosh x,\ \sinh x$ 是 $y''-y=0$ 的基本解组.

例. 已知 $\{e^x, x\}$ 是非齐次方程 $(x\neq1)$ $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的齐次方程的一个基本解组. 试计算原非齐次方程的特解.

解. 由常数变易法, 特解 $\tilde y(x)=c_1(x)e^x+c_2(x)x$.

且 $c_1(x)$, $c_2(x)$ 满足 $\begin{cases}c_1'(x)e^x+c_2'(x)x=0\\c_1'(x)e^x+c_2'(x)=x-1\end{cases}$

则 $c_2'(x)=-1$, $c_1'(x)=\frac{x}{e^x}$.

得 $c_1(x)=\int\frac{x}{e^x}d(x)=(-x-1)e^{-x}$, $c_2(x)=-x$.

$\therefore$ 非齐次方程一个特解 $\tilde y(x)=-(x+1)-x^2$

3. 已知 $(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$ 的一个特解 $y_1=x^2$, 试求该方程满足初始条件 $y(-1)=0$, $y'(-1)=0$ 的特解.

$y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=\frac{2+6x^2}{1+x^2}$. $y_1=x^2$.

$(1+x^2)y''+2xy'=0$. $\Rightarrow t=x^2+1$. 齐次方程. 解为 y_2

$ty''+t'y'=(ty')'=0$.

$ty'=C_0$, $(1+x^2)y'=C_0$, $y'=\frac{C_0}{1+x^2}$, $y_2=C_0\arctan x$

方程有通解 $y(x)=C_1+C_0\arctan x+x^2$. (齐通解; 非齐特解)

代入 $x=-1$, $y=0$, $y'=0$, ⇓ 满足初始条件的特解.

$0=C_1-\frac{\pi}{4}+1$, $0=\frac{C_0}{1+x^2}+2x=\frac{C_0}{2}-2$,

$C_1=\frac{\pi}{4}-1$, $C_0=4$, $y(x)=\frac{\pi}{4}-1+4\arctan x+x^2$.

例: 求 $y'''-3\lambda_0y''+3\lambda_0^2y'-\lambda_0^3y=0$ 的通解.

$T(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^3$ 为特征多项式.

积分因子法: $e^{-\lambda_0x}$ 同乘.

得 $(e^{-\lambda_0x}y)'''=0$, 原方程的解为

$y=e^{\lambda_0x}(C_0+C_1x+C_2x^2)$

例. 求方程基本解组.

(1) $y''-a^2y=0$

(2) $y''+4y'+13y=0$.

(2) 特征根 $\lambda=-2\pm3i$.

基本解组 $e^{-2x}\cos3x$, $e^{-2x}\sin3x$.

1. $\lambda^4-8\lambda^2+18=0$

$(\lambda^2-4)^2=-2$, $\lambda^2=4\pm\sqrt2 i$

$\therefore \lambda=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{2}+2}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{2}-2}$.

$\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{2}+2}$, $\beta=\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{2}-2}$.

$x=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)+e^{-\alpha t}(c_3\cos\beta t+c_4\sin\beta t)$.

例: 求下述方程多项式特解.

(1) $y''-2y'+y=x^2-4x$

(2) $y''+y'=4x+1$.

(1) x 两次 → 有特解形如 $\tilde y=ax^2+bx+c$.

将 y 代入原方程 (待定系数得)

$2a-2(2ax+b)+ax^2+bx+c=x^2-4x$

$ax^2+(b-4a)x+c-2b+2a=x^2-4x$.

得 $a=1$. $b=0$. $c=-2$.

$\therefore$ 原方程特解为 $\tilde y=x^2-2$.

(2) 观察: ① 0为 $T(\lambda)=\lambda^2+\lambda$ 一重根, $s=1$.

② x 有一次, 左边都是导, y 求导2次.

③ 左边都是导, 常数可有可无.

方程有特解形如 $\tilde y=x(ax+b)$

将 $\tilde y$ 代入方程, 经待定系数得

$\tilde y=2x^2-3x$.

例. 求 $y''-3y'+2y=36xe^{-x}$ 的特解.

$e^xy''-3e^xy'+2e^xy=36x$.

令 $z=e^xy$, $z''-3z'+2z=36x$.

$T(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$, $\tilde z=ax+b$.

$3a-2(3ax+b)=36x$,

$a=6$, $b=-9$. $y=(6x-9)e^{-x}$

变量代换 $y=ze^{-x}$. 代入得

$z''e^{-x}-2z'e^{-x}+ze^{-x}-3(z'e^{-x}-ze^{-x})+2ze^{-x}=36xe^{-x}$

$\therefore z''-6z'+5z=36x$.

待定系数得 $\tilde z=6x+5$.

则 $\tilde y=\tilde ze^{-x}=(6x+5)e^{-x}$.

$\therefore$ 原方程通解 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(6x+5)e^{-x}$.

※ $T_y(s)=s^2-3s+2$. $e^{-x}\to\lambda_0=-1$.

$T_z(\lambda)=T_y(s)|_{s=\lambda-1}$ 平移.

$=(\lambda-1)^2-3(\lambda-1)+2=\lambda^2-5\lambda+6$.

例. 求 $y''+y=2\sin\frac{x}{2}$ 的一个特解 $\tilde y$.

[观察可得 $\tilde y=a\sin x$, 待定系数.]

原方程是如下辅助方程的虚部

$y''+y=2e^{i\frac{x}{2}}$.

则用平移变换 $y=ze^{i\frac{x}{2}}$,

$T_y=\lambda^2+1$, $T_z=\lambda^2+1|_{\lambda\to\lambda-\frac{i}{2}}=(\lambda+\frac{i}{2})^2+1$

得 z 满足 $z''+iz'+\frac34z=2$.

观察得特解 $\tilde z=\frac83$, $\tilde y_0=\frac83e^{i\frac{x}{2}}$.

按 Euler 公式, $\tilde y_0=\frac83(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})$.

$\tilde y_0$ 的虚部为原方程的解 $\tilde y=\frac83\sin\frac{x}{2}$.