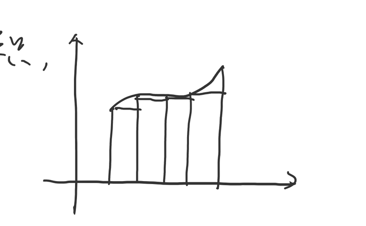
积分的性质计算

2021年11月22日 星期一　　上午8:25

一、定义

1. 几何：曲边梯形的面积，取 Reimann 和的极限可得



2. 代数：分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记分割宽度 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。

取 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，若有收敛极限 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{\|T\|\to0}S(T,\xi)=I$，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Reimann 可积，并记 $\int_a^b f(x)dx=I$，简写为 $\int_a^b f$。

如果存在实数 I，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，对 $\forall\xi_i$，都有 $|S_n(T)-I|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。（I 为极限）

若 $\lim\limits_{\|T\|\to0}S(T,\xi)$ 不存在（不收敛），则不可积。

二、基本定理

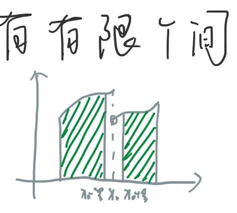
1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界。（必要）

证明：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 无界，则必存在某个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界。取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$f(\xi_i)$ 无界，$f(\xi_i)\Delta x_i$ 无界。又 $f(x)$ 可积，即对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta$，$\Delta x_i<\delta$ 时，$\left|\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\le\varepsilon$，$\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\le I+\varepsilon$

即 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 有界，与无界矛盾。

2. 有界闭区间上的连续函数可积。（充分）

有界闭区间上的函数仅有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积。



3. 闭区间上的单调函数可积。

三、计算性质

0. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.　$\int_a^a f(x)dx=0$.

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则在 $[a,b]$ 任意子区间 $[c_1,c_2]$，$[c_2,c_3]$ 可积，且满足：

$\int_{c_1}^{c_3}f=\int_{c_1}^{c_2}f+\int_{c_2}^{c_3}f$（面积可加性）。

$\left(\int_0^1=\int_0^{-3}f+\int_{-3}^1 f,\ \int_0^1-\int_0^{-3}f=\int_0^1 f+\int_{-3}^0 f=\int_{-3}^1 f\right)$

2. $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx\cdot\int_a^b f_2(x)dx$.

3. $f(x)$. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$a\le b$，

① $f(x)\ge0$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge0$.

② $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.　高→面积大

③ $|f(x)|$ 可积，则 $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.

$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$. $-\int_a^b|f|\le\int_a^b f\le\int_a^b|f|$

$\therefore\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.　位移 ≤ 路程.

4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且有 $m\le f(x)\le M$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 成立，$a\le b$，则有

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

5. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号（恒 ≥0 或恒 ≤0）。则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)dx$.

特别：取 $\varphi(x)=1$，$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$　积分平均值.

例. $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^2x\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin2x}{4}\right)\Big|_0^\pi=\frac12$

交流电最大较大功率是平均功率的2倍.

例. 将下列数列极限表示成积分.

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}\right)$

通项 $a_n=\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\frac1n\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{4-(\frac in)^2}}$，

是 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 在 $[0,1]$ 上 n 等分割之下的一个 Reimann 和.（ξ 取右端点）.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\ldots$

例. 试证：$0<\int_0^{10}\frac{x}{x^3+16}dx<\frac56$.

*若 $f(x)$. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(x)\le g(x)$，但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不恒相等，则有 $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$.

证明：对 $f(x)=\frac{x}{x^3+16}$，$f'(x)=\frac{x^3+16-x(3x^2)}{(x^3+16)^2}=\frac{-2x^3+16}{(x^3+16)^2}$.

P174 Th10 定积分估算. $m\le f(x)\le M$　$m(b-a)\le\_\le M(b-a)$

在 $[0,10]$ 上有最小值 $m=f(0)=0$，$M=f(2)=\frac1{12}$.

$\therefore\int_0^{10}m\,dx<\int_0^{10}f(x)dx<\int_0^{10}M\,dx$

$\therefore0<\int_0^{10}f(x)dx<\frac56$.

四、变上限积分.

1. 定义：在区间上的连续函数的变上限积分就是其原函数.（$[a,x]$ 上的积分）.

2. 性质定理：

① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，固定 $c\in[a,b]$，则有变上限积分 $\int_c^x f(t)dt=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

证明：$[a,b]$ 上可积 ⇒ 有界.

$\therefore\exists M>0$，$\forall x\in[a,b]$，$|f(x)|\le M$.

$\therefore$ 对 $\forall x_1<x_2\in[a,b]$，有

$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=\left|\int_c^{x_2}f(t)dt-\int_c^{x_1}f(t)dt\right|$

$=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)d(t)\right|\le\left|\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|dt\right|$

$\le\left|\int_{x_1}^{x_2}M\,dt\right|=M|x_2-x_1|$

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，对 $\forall|x_2-x_1|<\delta$，都有 $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<\varepsilon$. $\therefore$（一致）连续.

② 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中某点 x_0 处连续，则 $\varphi(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\varphi'(x_0)=f(x_0)$.

证明：
$$\left[\begin{aligned}&\varphi'(x_0)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f(x).\\&\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}-f(x)\right)\\&=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt-f(x_0)\right)\\&=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x(f(t)-f(x_0))dt\right)=0.\end{aligned}\right]$$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_\varepsilon>0$ 使当 $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.（连续）.

对该 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_\varepsilon>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ 时，

有 $\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x(f(t)-f(x_0))dt\right|$

$\le\left|\frac{1}{x-x_0}\right|\left|\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|dt\right|$

$\le\frac{1}{|x-x_0|}\cdot\varepsilon|x-x_0|=\varepsilon$.

③ 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则

1° $f(x)$ 在 I 上的任意一个原函数可以表示成 $C+\int_a^x f(t)$.

2° 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

$\left(F(b)-F(a)=\left(C+\int_{x_0}^x f(t)dt\right)\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_a^b f(x)dx.\right)$

3. 例. 假设 $f(x)$ 在 J 中连续，函数 $a(x)$. $b(x)$ 在区间 I 中可导，并满足 $a(x)$. $b(x)\in J$.

试证求导公式：

$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$

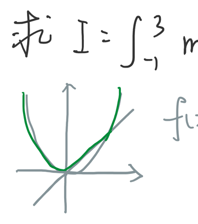
证明：取定 $c\in J$，则 $\int_c^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 J 中的一个原函数，可记

$\psi(x)\xlongequal{记}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt=\int_c^{b(x)}f(t)dt-\int_c^{a(x)}f(t)dt$

$\therefore\frac{d\psi(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_c^{b(x)}f(t)dt\right)-\frac{d}{dx}\left(\int_c^{a(x)}f(t)dt\right)$

$=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$

例. 求 $I=\int_{-1}^3\max\{x,x^2\}dx$.



$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le0\\ x, & 0<x<1,\\ x^2, & 1\le x\le3.\end{cases}$　分段 → 拆分 → 使用.

$\therefore I=\int_{-1}^0x^2dx+\int_0^1x\,dx+\int_1^3x^2dx$

$=\frac13x^3\Big|_{-1}^0+\frac12x^2\Big|_0^1+\frac13x^3\Big|_1^3$

$=\frac13+\frac12+\frac{26}{3}=\frac{19}{2}$

例. $f(x)=\int_{\sin(3x)}^{2x}\cos(t^2)dt$，求 $f'(x)$.

$\frac{d}{dx}f(x)=\cos(2x)^2\cdot2-\cos(\sin(3x))^2\cdot3\cos3x$

$=2\cos4x^2-3\cos(\sin3x)^2\cos3x$. $x\in(-\infty,+\infty)$

$\cos(t^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续可导. $a(x)$. $b(x)$ 可导.

例. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}$

比值极限 → 洛必达，使用变限积分求导.

$l\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{\sin(\tan x)}\times\frac{1}{\cos^2x}}{\sqrt{\tan(\sin x)}\times\cos x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\cos^3x}=1$.

五、计算定积分方法

1. 定积分的换元法：

假设 $f(x)$ 在包含 $[a,b]$ 的某个区间 J 中连续，$\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$. $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$. $\varphi([\alpha,\beta])\subset J$，则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

（若 $\varphi'(t)$ 恒不为零，则"$f(x)$ 连续"可减弱为"可积"）

证明：$F(x)$ 为 $f(x)$ 原函数.

$F(\varphi(t))$ 为 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 原函数.

两边同时用 N-L 公式.

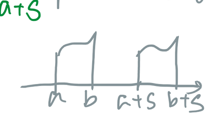
例. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$s.c\in\mathbb{R}$. 证：

(1) $\int_{a+s}^{b+s}f(x-s)dx=\int_a^b f(x)dx$　（平移变换）.

(2) $\int_{2c-b}^{2c-a}f(2c-x)dx=\int_a^b f(x)dx$　（翻转变换）.

证明：(1) $\int_a^b f(x)dx\xlongequal[t=x+s]{x=t-s}\int_{a+s}^{b+s}f(t-s)dt$

$=\int_{a+s}^{b+s}f(x)dx$.

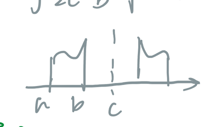


保持积分限

(2) $\int_a^b f(x)dx\xlongequal[t=2c-x]{x=2c-t}\int_{2c-a}^{2c-b}f(2c-t)d(2c-t)$

$=-\int_{2c-a}^{2c-b}f(2c-t)dt=\int_{2c-b}^{2c-a}f(2c-t)dt$

$=\int_{2c-b}^{2c-a}f(2c-x)dx$

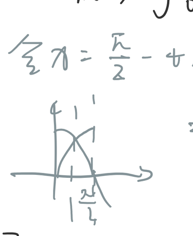


特殊：$\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a}f(-x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$. $(x=\frac{a+b}{2})$

例. $m\in\mathbb{N}$，$\int_0^{\frac\pi2}\cos^mx\,dx=\int_0^{\frac\pi2}\sin^mx\,dx$.

令 $x=\frac\pi2-t$. $\int_0^{\frac\pi2}\cos^mx\,dx=\int_0^{\frac\pi2}\cos^m(\frac\pi2-t)\,d(-t)$



$=-\int_{\frac\pi2}^0\cos^m(\frac\pi2-x)dx=\int_0^{\frac\pi2}\sin^mx\,dx$.

例. 假设 $f(x)$. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(a+b-x)=f(x)$，$g(a+b-x)+g(x)=A$，则证：

$\int_a^b fg=\frac A2\int_a^b f=A\int_c^b f=A\int_a^c f$. $(c=\frac{a+b}{2})$.

证明：[$f(a+b-x)=f(x)$

对称.]

$I=\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac12I+\frac12I$

$=\frac12\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac12\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx$

$=\frac12\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac12\int_a^b f(x)(A-g(x))dx$

$=\frac12\int_a^b f(x)(g(x)+A-g(x))dx=\frac A2\int_a^b f(x)dx$.

$\frac12\int_a^b f=\frac12\int_a^c f+\frac12\int_c^b f$ → 证相等.

$\xlongequal{x=a+b-t}\frac12\int_c^b f(a+b-x)+\frac12\int_c^b f(x)$

$=\frac12\int_c^b f(x)dx+\frac12\int_c^b f(x)dx$

例. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数，则证对 $\forall a\in\mathbb{R}$，有

$\int_a^{a+T}f(x)dx\overset{①}{=}\int_0^T f(x)dx\overset{②}{=}\int_0^{-T}f(-x)dx$

证明：$\int_a^{a+T}f=\int_a^0 f+\int_0^T f+\int_T^{a+T}f=I_1+I_2+I_3$

$I_3=\int_T^{a+T}f(x)dx\xlongequal[t=x-T]{x=T+t}\int_0^a f(T+t)dt$

$=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx=-I_1$ ①√.

$\int_0^T f(x)dx\xlongequal[t=-x]{x=-t}\int_{-T}^0 f(-x)dx=\int_0^T f(-x)dx$.

例. 计算 $I=\int_0^a\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac32}}dx$

$I\xlongequal{x=a\tan t}\int_0^{\frac\pi4}\frac{a\sec^2t\,dt}{a^3\sec^3t}=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac\pi4}\cos t\,dt$

$=\frac{1}{a^2}\sin t\Big|_0^{\frac\pi4}=\frac{\sqrt2}{2a^2}$.　按不定积分换元注意积分限.

2. 分部积分法.

$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$.

或 $\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$.

例. 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2}$.

$I\xlongequal{x=\tan\theta}\int_0^{\frac\pi4}\frac{\ln\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}\right)}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta$　$1+\tan^2\theta\times\cos^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

$=\int_0^{\frac\pi4}\ln(\sin\theta+\cos\theta)d\theta-\int_0^{\frac\pi4}\ln\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac\pi4}\ln\left(\sqrt2\cos(\frac\pi4-\theta)\right)d\theta-\int_0^{\frac\pi4}\ln\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac\pi4}\ln\sqrt2+\int_0^{\frac\pi4}\ln(\cos(\frac\pi4-\theta))d\theta-\int_0^{\frac\pi4}\ln\cos\theta\,d\theta$　翻转

$=\frac\pi8\ln2$.　原函数非初等函数，但可算定积分.

例. 对 $n\in\mathbb{N}$，记 $I_n=\int_0^{\frac\pi2}\cos^nx\,dx=\int_0^{\frac\pi2}\sin^nx\,dx$，

试证：$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\ge2)$. $(I_0=\frac\pi2,\ I_1=1)$.

$I_n=\int_0^{\frac\pi2}\cos^nx\,dx=\int_0^{\frac\pi2}\cos^{n-1}x\,d\sin x$

$=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_0^{\frac\pi2}-\int_0^{\frac\pi2}\sin x(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$

$=0+(n-1)\int_0^{\frac\pi2}(1-\cos^2x)\cos^{n-2}x\,dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac\pi2}\cos^{n-2}x-\cos^nx\,dx$

$=(n-1)I_{n-2}-I_n$　$\therefore I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

$\Rightarrow I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac\pi2, & n\text{ 为偶}.\end{cases}$

例. 求 $I=\int_0^{\sqrt3}x\arctan x\,dx$

$I=\frac12\int_0^{\sqrt3}\arctan x\,dx^2=\frac12\left(x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt3}-\int_0^{\sqrt3}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\right)$

$=\frac12\left(3\times\frac\pi3\right)-\frac12\int_0^{\sqrt3}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac\pi2-\left(\frac x2-\frac{\arctan x}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt3}$

$=\frac\pi2-\frac{\sqrt3}{2}+\frac\pi6=\frac23\pi-\frac{\sqrt3}{2}$.

六、函数可积性.

1. 定义概念.

可积 ⇒ 有界 ⇒ $\exists m.M$，$m\le f(x)\le M$.

子区间上 $M_i=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$，

$m_i=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$.

振幅 $w=M-m$，$w_i=M_i-m_i$.

Darboux 上和 $\overline{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^nM_i\Delta x_i$，

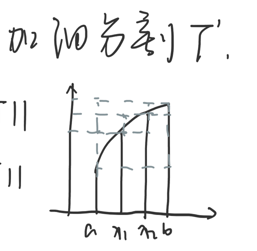
Darboux 下和 $\underline{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^nm_i\Delta x_i$.

2. 定理.

① T 添加 l 个分割点得到加细分割 T'.

$\overline{S}(T)\ge\overline{S}(T')\ge\overline{S}(T)-lw\|T\|$

$\underline{S}(T)\le\underline{S}(T')\le\underline{S}(T)+lw\|T\|$



上和减，下和增.

② $T_1\cup T_2=T$，则有 $\underline{S}(T_1)\le\underline{S}(T)\le\overline{S}(T)\le\overline{S}(T_2)$

③ $\overline{I}=\inf(\overline{S}(T))$ 上和的下确界.

$\underline{I}=\sup(\underline{S}(T))$ 下和的上确界.

有 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\overline{S}(T)=\overline{I}$，$\lim\limits_{\|T\|\to0}\underline{S}(T)=\underline{I}$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists T_0$ 使 $\overline{I}\le\overline{S}(T_0)<\overline{I}+\frac\varepsilon2$（下界）.

记 T_0 的内分点数目为 l.

对 $\forall$ 分割 T，当 $\|T\|\le\frac{\varepsilon}{2lw+1}$ 时，

有 $\overline{I}\le\overline{S}(T)\le\overline{S}(T\cup T_0)+lw\|T\|$

$\le\overline{S}(T_0)+lw\|T\|<\overline{I}+\frac\varepsilon2+lw\left(\frac{\varepsilon}{2lw+1}\right)<\overline{I}+\varepsilon$.

④ 性质（充要条件）.

1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积

2) $\lim\limits_{\|T\|\to0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^nw_i\Delta x_i=0$

3) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 分割 T_ε 使 $\sum\limits_{i=1}^nw_i\Delta x_i<\varepsilon$.

4) $\overline{I}=\underline{I}$ 上下积分相等.

1) ⇒ 2) 定义. 2) ⇒ 3) 极限. 3) ⇒ 4) "完备性" 4) ⇒ 1) 收敛极限

例. 有界闭区间上的连续函数可积.

证明：设 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续，$\exists\delta_\varepsilon>0$，使当 $x_1.x_2\in[a,b]$. $|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{b-a+1}\varepsilon$

$\therefore$ 当 $\|T\|<\delta_\varepsilon$ 时，有 $w_i<\frac{1}{b-a+1}\varepsilon$，

$\sum\limits_{i=1}^nw_ix_i\le\frac{\varepsilon}{b-a+1}\sum\limits_{i=1}^n\Delta x_i=\frac{\varepsilon(b-a)}{b-a+1}<\varepsilon$.

有界函数Riemann可积的3个判别.

根据定理④3)，得其可积.

例. 有界闭区间上单调递增（减）的连续函数可积.

证明：常值 → 可积.

非常值 → 不妨设单增，$f(a)<f(b)$.

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，

则当 $\|T\|<\delta_\varepsilon$ 时，有

$\overline{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^nw_i\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^nw_i\|T\|$.

$=\|T\|\sum\limits_{i=1}^n(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\|T\|(f(a)-f(b))$

$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\times(f(b)-f(a))=\varepsilon$.　放缩.

例. $f(x)$. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明：$f(x)$. $g(x)$ 可积 ⇒ 在 $[a,b]$ 有界.

$\exists M>0$，$x\in[a,b]$. $|f(x)|<M$，$|g(x)|<M$.

由 $|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|$

$=|f(x_1)(g(x_1)-g(x_2))+g(x_2)(f(x_1)-f(x_2))|$

$\le M|g(x_1)-g(x_2)|+M|f(x_2)-f(x_1)|$.

$f(x)$. $g(x)$ 可积，对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta_\varepsilon$，$\|T\|<\delta_\varepsilon$ 时，

有 $\sum\limits_{i=1}^nw_i(f)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}$，$\sum\limits_{i=1}^nw_i(g)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}$.

$\therefore$ 对 $\sum\limits_{i=1}^nw_i(fg)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^n|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\Delta x_i$

$\le\sum\limits_{i=1}^n(M|g(x_i)-g(x_{i-1})|\Delta x_i+M|f(x_i)-f(x_{i-1})|)\Delta x_i$

$=\sum\limits_{i=1}^n(Mw_i(g)\Delta x_i+Mw_i(f)\Delta x_i)$

$=M\sum\limits_{i=1}^nw_i(g)\Delta x_i+M\sum\limits_{i=1}^nw_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$.

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积.

证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则有对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta_\varepsilon$，$\|T\|<\delta_\varepsilon$ 时，$\sum\limits_{i=1}^nw_i\Delta x_i<\varepsilon$.

即 $\sum\limits_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\Delta x_i<\varepsilon$.

又 $\because\big||f(x_i)|-|f(x_{i-1})|\big|<|f(x_i)-f(x_{i-1})|$，

$\therefore0<\sum\limits_{i=1}^n\big||f(x_i)|-|f(x_{i-1})|\big|<\sum\limits_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$.

根据夹逼，有 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^nw_i(|f|)\Delta x_i=0$. 可积.

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $|f(x)|\ge c>0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积.

估算振幅：$w(\frac1f)=\left|\frac{1}{f(x_2)}-\frac{1}{f(x_1)}\right|\le\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_2)}\right|$

$\le\frac{1}{c^2}|f(x_2)-f(x_1)|=\frac{1}{c^2}w(f)$

$\because$ 对 $\forall T$ 都有 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum w_i(f)\Delta x_i=0$.

$\therefore\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^nw_i(\frac1f)\Delta x_i\le\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^nw_i(f)\times\frac{1}{c^2}\Delta x_i$

夹逼 ⇒ $\lim\limits_{\|T\|\to0}$ 可积.