积分的应用推广

2021年12月1日 星期三 上午9:46

一、微元法

1. 微元分析法

几何/物理量 Q 分布在 x 轴的区间 $[a,b]$ 上，若小区间 $[x, x+dx]$ 上的分布量 $dQ = f(x)dx + o(dx)$ $(dx\to 0)$，则总分布量 $Q = \int_a^b f(x)dx$，称 $f(x)$ 为 Q 的分布密度。

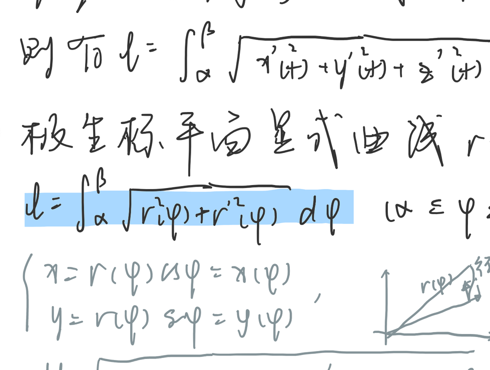
2. 弧长

① 平面参数式曲线：$\gamma: x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta$，其弧长为 $\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$

② 特化为平面显式曲线 $\begin{cases}x=x\\ y=f(x)\end{cases}$，则有 $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

③ 推广到空间参数式：$\gamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t)$，则弧长为 $\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$

④ 极坐标平面显式曲线 $r=r(\theta)$ 的弧长 $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$

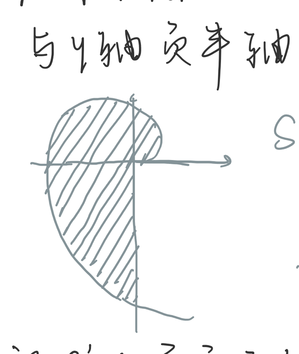


3. 面积

① $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$，$x=a,\ x=b$ 所围成的平面图形的面积为 $\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,dx$

② 极坐标中曲线 $r=r(\theta)$ 与两射线所围图形的面积为 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$

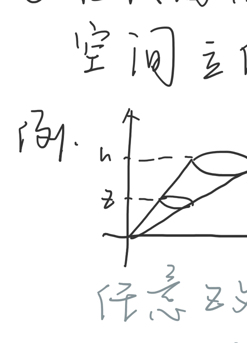
例. 求 Archimedes 螺线 $r=a\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 与 y 轴负半轴所围平面图形的面积。



③ 设 C 是平面曲线，$x=x(t), y=y(t)$ $(a\le t\le b)$……

4. 体积

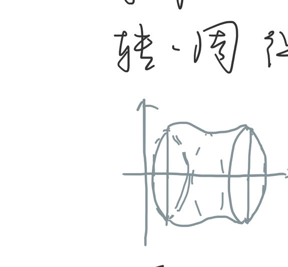
① 已知面积为连续函数的几何体的体积，$V=\int_a^b S(x)\,dx$



② 旋转体

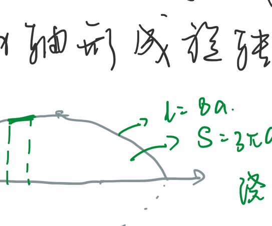
i. 由平面曲线 $y=f(x)$ 及直线所围图形绕 x 轴旋转……$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

ii. 平面显式曲线绕 y 轴旋转体积



$(0\le a<b$ 或 $a<b\le 0)$：$V=2\pi\int_a^b dV = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$

iii) 侧面积.



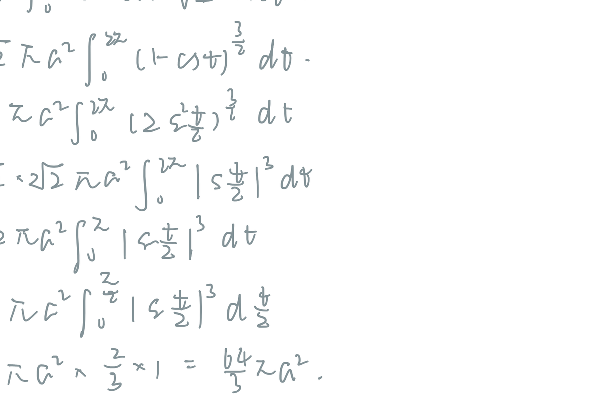
圆台侧面积：$\pi(y+dy+y)\,ds$（上底 r，下底 r，弧）

$=2\pi y\,ds + \pi\,dy\,ds$

$S=\int_a^b 2\pi y(x)\,ds + \pi\,dy\,ds$

$=\int_a^b 2\pi|y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_a^b 2\pi|y|\,dl.$

例. 旋轮线 $L: (x,y)=(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$，$0\le t\le 2\pi$，$L$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴形成旋转体，求 S, V.



$V=\int_0^{2\pi} S(x)\,dx = \int_0^{2\pi}\pi y^2\,dx$

$dx=\Delta x = x(t)-x(t+dt)$ 线性主部 dt. 换成微元对面.

$=\int_0^{2\pi}\pi a^2(1-\cos t)^2\,d(a(t-\sin t))$

$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$

~~$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^3 t + 3\cos^2 t - 3\cos t)\,dt$~~

~~$=\pi a^3 (t|_0^{2\pi} - 3\sin t|_0^{2\pi})$~~

$=2\pi a^3\int_0^\pi(1-\cos t)^3\,dt = 2\pi a^3\int_0^\pi \left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3 dt$

$=16\pi a^3\int_0^\pi \left(\sin\frac{t}{2}\right)^6 dt = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^6 d\frac{t}{2}$

$=32\pi a^3\cdot\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3.$

$S=\int_0^{2\pi} 2\pi|y(x)|\sqrt{1+|y'(x)|^2}\,dx$

$=\int_0^{2\pi}2\pi|y(t)|\sqrt{1+|y'(t)|^2\frac{1}{|x'(t)|^2}}\,x'(t)\,dt$

$=\int_0^{2\pi}2\pi|y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+y'(t)^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}2\pi a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$

$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt$

$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt$

$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt$

$=2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^3 dt$

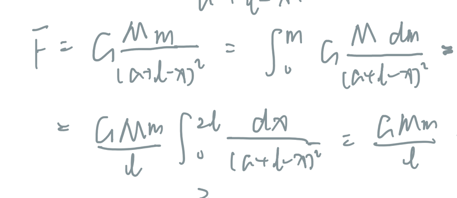
$=8\times 2\pi a^2\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^3 dt$

$=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^3 d\frac{t}{2}$

$=32\pi a^2\times\frac{2}{3}\times 1 = \frac{64}{3}\pi a^2.$

5. 引力

例



求 m 对 M 的引力.

$F=G\frac{Mm}{(a+l-x)^2} = \int_0^m G\frac{M\,dm}{(a+l-x)^2} = \int_0^{2l}G\frac{M\frac{m}{l}}{(a+l-x)^2}\,dx$

$=\frac{GMm}{l}\int_0^{2l}\frac{dx}{(a+l-x)^2} = \frac{GMm}{l}\left.\frac{1}{(a+l-x)}\right|_0^{2l}$

两根 ⇒ 叠加.

二、广义积分

1. 定义

(1) 假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，如果有极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f$，则令 $\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f$（不存在称为广义积分发散，不存在）

例. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$

$S(b)=\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1-\frac{1}{b}$

(2) 假设 $f(x)$ 在有界区间 $(a,b]$ 中连续，且不在 a 的右侧有界，如果有极限 $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f$，则令 $\int_a^b f = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f$，称 a 是瑕点，该积分为瑕积分。

例. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$S(c)=\int_c^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = 2(1-\sqrt{c})$

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0^+}S(c) = 2.$

2. (1) 当 p 取何值时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 和 $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ 存在，收敛 $\Leftrightarrow p>1$；$p<1$；$a>0$.

……

(2) 第一类 p 积分：$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$ 在 $p<1$ 时收敛……

练习：① $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ……

② 讨论 $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$ 的存在性.

(3) 混合型广义积分.

$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续……$\int_a^{+\infty}f = \int_a^c f + \int_c^{+\infty} f$……

3. 计算

① 假设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$F(x)$ 是它在 (a,b) 上的一个原函数，则 $\int_a^b f$ 存在当且仅当 $F(a+0)$ 及 $F(b-0)$ 都存在，此时有 $\int_a^b f(x)dx = F(b-0)-F(a+0)$

例. 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$……

② 假设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$\varphi(t)$ 在……上有 C^1 且严格单调……

③ 广义积分的分部积分法：$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$……

例. 试讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^p}\,dx$ ……

例. 讨论以下积分的敛散性

(1) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln x}dx$. (2) $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x\ln x}dx$.

(1) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\ln x}d\ln x = \ln|\ln x|\Big|_{0+0}^{\frac{1}{2}}$

$=\ln|\ln\frac{1}{2}| - \lim_{x\to 0}\ln|\ln x| = -\infty$. 发散.

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x\ln x}dx = \ln|\ln x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-0} = -\infty$ 发散.

例. 计算 ① $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$. $(\alpha\in\mathbb{R})$

② $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

① $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^\alpha)}d\arctan x$

$=\frac{\arctan x}{1+x^\alpha}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\arctan x\,d\frac{1}{1+x^\alpha}$

$=0-\int_0^{+\infty}$

令 $x=\tan t$，$t\in[0,\frac{\pi}{2})$. ★三角代换，主要类型.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2 t)(1+\tan^\alpha t)}d\tan t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\boxed{\frac{\sec^2 t}{(1+\tan^2 t)(1+\tan^\alpha t)}}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\tan^\alpha t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\cos^\alpha t+\sin^\alpha t}dt$ 同时乘 $\cos^\alpha t$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t}{\cos^\alpha t+\sin^\alpha t}dt = \frac{1}{2}(I+I) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t+\sin^\alpha t}{\cos^\alpha t+\sin^\alpha t} = \frac{\pi}{4}.$

② $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$

$=x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

令 $x=2\alpha$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin\alpha\cos\alpha)\,2d\alpha$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln\sin\alpha+\ln\cos\alpha)\,d\alpha$ $\quad \alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

$=\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\alpha\,d\alpha + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\alpha)\,d\alpha$

$=\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\alpha\,d\alpha + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin\alpha)\,d(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$=\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2J.$

$\therefore J=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

例. 试证 ① $\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \pi.$

② $\int_0^1\ln^n x\,dx = (-1)^n n!$

(1) 令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$，$0<t<\frac{\pi}{2}$.

则 $b-x=(b-a)-(x-a)=(b-a)\cos^2 t$.

$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(b-a)\sin t\cos t}d((b-a)\sin^2 t+a)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t(b-a)\cos t}{(b-a)\sin t\cos t}dt = \pi.$

(2) $I_0=1.$

$I_n=\int_0^1\ln^n x\,dx = x\ln^n x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,d(\ln^n x)$

$=-\int_0^1 x\cdot n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx = -n\int_0^1\ln^{n-1}x\,dx$

$=-nI_{n-1} = \cdots = (-1)^n n!\,I_0 = (-1)^n n!\,I_n.$

例. $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的可积函数. 试证：$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_T^{2T}f(t)dt = \cdots = \frac{1}{T}\int_{x-T}^x f(t)dt.$

$\int_0^x f(t)dt =$

记 $[x]$ 为 $\{kT\,|\,k\in\mathbb{Z}^+\}$ 中不大于 x 的最大值

则有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{[x]}=1$，$x\sim[x]$.

则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{[x]}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{[x]}f(t)dt+\int_{[x]}^x f(t)dt}{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{k_xT}f(t)dt+\int_{k_xT}^x f(t)dt}{k_xT}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k_x\int_0^T f(t)dt+\int_{k_xT}^x f(t)dt}{k_xT}$

$=\frac{\int_0^T f(t)dt}{T} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{k_xT}^x f(t)dt}{k_xT}$

$f(t)$ 在 $[k_xT, x]$ 连续，则有界.

$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{k_xT}^x f(t)dt}{k_xT} \le \lim\frac{\int_{k_xT}^x M\,dt}{k_xT}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-k_xT)M}{k_xT} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{TM}{k_xT} = \lim_{x\to+\infty}\frac{M}{k_x} = 0.$

$\therefore$ 原极限 $=\frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$

例. $f(x)\in C^1[0,1]$，且 $|f'(x)|\le M.$

试证：$|\Delta_n| = \left|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right| \le \frac{M}{2n}.$

证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|$

$=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx - \sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx\right|$

$=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx\right|$

$\le\sum_{k=1}^n\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx\right|$

$\exists\,\xi_k\in(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})$，$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))dx = (f(\xi_k)-f(\frac{k}{n}))\frac{1}{n}$

$=\frac{(f(\xi_k)-f(\frac{k}{n}))}{n} = f'(\frac{k}{n})$

$=\sum_{k=1}^n\frac{f(\xi_k)}{n} - \sum_{k=1}^n\frac{f(\frac{k}{n})}{n}$

$\exists\,\eta_k\in(\xi_k,\frac{k}{n})$，$\sum_{k=1}^n\frac{f'(\eta_k)}{n}\le\frac{M}{2n}.$

$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx.$（定义）

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)dx.$（变形）

$\therefore\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|$

$=\left|\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx - \sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)dx\right|$

$\le\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)|\,dx$

$\le M\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,dx.$

$=M\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2-(k-1)^2}{2n^2}\right) = \frac{M}{2n}.$