课后题

2022年3月23日 星期一 上午11:02

作业(习题 5-1)

1. $f(x)=\cos x$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2. $\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

   $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

   $S_n=(\xi_1\Delta x_1)+(\xi_2\Delta x_2)+\cdots+(\xi_n\Delta x_n)$

   $=\xi_1\Delta x_1+\xi_2\Delta x_2+\cdots+\xi_n\Delta x_n$

   $\le\lambda\Delta x_1+\lambda\Delta x_2+\cdots+\lambda\Delta x_n$

   $=\lambda(x_1-x_0)+\lambda(x_2-x_1)+\cdots+\lambda(x_n-x_{n-1})$

   $=\lambda(x_n-x_0)=\lambda(b-a)$.

   $\lim_{\lambda\to0}S_n=\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

3. $\int_0^1 e^x\,dx=\frac{1}{2}(e^2-1)$.

4. $\int_a^b\cos x\,dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\cos\xi_i\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\cos\xi_i\cdot\frac{b-a}{n}$

   $=\frac{b-a}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[\cos(a+\frac{b-a}{n}i)+\cos(a+\frac{b-a}{n}(i-1))]$

   $=\frac{b-a}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[\cos(a+\frac{b-a}{n}i)+\cos(a+\frac{b-a}{n}i-\frac{b-a}{n})]$

   $=\frac{b-a}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[\cos(a+\frac{b-a}{n}i)+\cos(a+\frac{b-a}{n}i)\cos\frac{b-a}{n}+\sin(a+\frac{b-a}{n}i)\sin\frac{b-a}{n}]$

   $=\frac{b-a}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[\cos(a+\frac{b-a}{n}i)(1+\cos\frac{b-a}{n})