补充题

2021年11月22日 星期一　　上午11:02

习题课

1. (1) $\int_x^{x^2} \sin t^2 \, dt$. $\varphi'(x)$
(2) 已知 $f(t)=|t-x|g(t)$, $\varphi(x)=\int_a^b f(t)\,dt$.
(3) $f(x)=\int_0^x (1-\sin(t))\,dt$, $f'(x)=1-\sin(x)$.
(5) $y=\int_0^{1+\sin t}(1+e^{u^2})\,du$. $\begin{cases} x=\cos 2v \\ t=\sin v\end{cases}$ $\frac{dy}{dx}$
(4) $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\,dt$. $\frac{dy}{dx}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}f(t)\,dt}{f(x)}$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}+\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+2}+\cdots+\frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{1}{n}}\right)$

4. (1) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+\frac{1}{3}}x\,dx$
(2) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+(1-x)^3}\,dx$
(3) $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}x^2e^{-x^2}\,dx$

5. $\lim_{x\to 1}f(x)$. $\int_0^1 f(x)\,dx$ 存在
$f(x)=(x^2-1)\lim_{x\to 1}f(x)+x\int_0^1 f(x)\,dx+2$

6. $f(x)\left(1+\int_0^x f(t)\,dt\right)=e^{-2x}$

7. $\int_a^b g=0$. $\int_a^b fg=0$. 证 $f(x)$ 有值.

P186 例149题，证明 n 在
$\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=a_n$
$\lim_{n\to\infty}n\,a_n=\frac{b-a}{2}\left(f(a)-f(b)\right)$

1. (1) $\int_1^9\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$
(2) $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$, $x=a\sin t$.
(3) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$
(4) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

2. $\int_{2n}^{2n+2}f(x-2n)e^{-x}\,dx$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$

4. $\int_0^x t f(2x-t)\,dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$. $f(1)=1$. $\int_1^2 f(x)\,dx$

1. (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

重新刷 Emm..

1. (1) $\varphi(x)=\int_a^b|x-t|g(t)\,dt$. $x\in[a,b]$. $\varphi'(x)$. $\varphi''(x)$
(2) $y=\int_0^{1+\sin t}(1+e^{u^2})\,du$. $x=\cos 2v$, $t=\sin v$. $\frac{dy}{dx}$
(3) $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\,dt$

2. (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{e^{x^2}-2x^2-1}$
(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)\sin t^2\,dt}{(x^2+x^3)(1-\sqrt{1-x^2})}$
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right)du}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$
(4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{x}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,dt$

3. (1) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+(1-x)^3}\,dx$
(2) $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}x^2e^{-x^2}\,dx$

4. $f(x)\left(1+\int_0^x f(t)\,dt\right)=e^{-2x}$.

5. (1) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x}$ 无界，且不存在.
(2) $\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x\,dx}{2+\tan^2 x}$

6. (1) $\int_1^9\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$
(2) $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$
(3) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$
(4) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

7. $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$. $\int_{2n}^{2n+2}f(x-2n)e^{-x}\,dx$

8. (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$
(2) $\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h(f(x+h)-f(x-h))\,dx}{h^2}$

9. $\int_0^x t f(2x-t)\,dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$. $f(1)=1$. $\int_1^2 f(x)\,dx$

10. $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,dt$. $f'(0)$.
间断点 → 定义.

11. (1) $I=\int_0^1\left(\int_x^1\arctan(t^2)\,dt\right)dx$
$F(x)=\int_x^1\arctan(t^2)\,dt$.
$I=\int_0^1 F(x)\,dx=xF(x)-\int_0^1 x\,dF(x)$
(2) $f(x)=\int_1^x e^{-y^2}\,dy$
$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. $\varphi'(x)$.

13. (1) $\int_{-1}^1\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$
(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-x)^2\cos^3 x}{1+x^2}\,dx$
(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$
(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}dx$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\,dx=2$. $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\,dx$

证明题专练

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $(\xi-a)f(\xi)=\int_\xi^b f(x)\,dx$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，证明
$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\int_a^b|f'(x)|\,dx$.

3. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续增，证明
$\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx\le(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

4. $\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{M}{2n}$.
其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，对 $\forall x,y\in[0,1]$ 均有 $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的导函数连续，
$a_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$，$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$.
证明 $\lim_{n\to\infty}n\,a_n=\frac{b-a}{2}\left(f(a)-f(b)\right)$.

Proof 一些.

6.

习题课

1. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(0)=0$.
求证：$\int_0^1|f(x)|^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2dx$
等号成立当且仅当 $f(x)\equiv Cx$.

2. $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)=f(1)=0$，连续可微，求证 $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\le\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2dx$
等号成立当且仅当 $f(x)\equiv Ax(1-x)$.

3. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0\le f(x)\le 1$. 求证
$2\int_0^1 x f(x)\,dx\ge\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$.
并求能取等的连续函数.

4. $\int_0^{x^2}f(t)\,dt=\int_0^x f(x)\,dt$.

5. $\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$

计算专项..

换元 / 分部积分 / 积分中值定理 / 平移翻转 / 奇偶 周期

1. (1) $\int_1^9\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$
(2) $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$
(3) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$
(4) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

2. $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^h\left(f(x+h)-f(x-h)\right)dx$

3. $\int_0^x t f(2x-t)\,dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$. $f(1)=1$.

4. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x}\cos nx\,dx$

5. $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,dt$.

6. (1) $I=\int_0^1\left(\int_x^1\arctan(t^2)\,dt\right)dx$
(2) $f(x)=\int_1^x e^{-y^2}\,dy$.

7. $f(x)$ 连续. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$. $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. $\varphi'(x)$.

8. (1) $\int_{-1}^1\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$
奇偶 → 去观察. $(-1,1)$ 关于原点对称.
$2x\sqrt{1-x^2}$ 为奇函数，积分为0.
(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-x)^2\cos^3 x}{1+x^2}\,dx$
(3) $\int_{-2}^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x^2)\,dx$
(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\min\left\{\frac{1}{2},\cos x\right\}dx$

9. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\,dx=2$. 求 $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\,dx$
(2) $f(x)=\int_x^{x+2\pi}(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t})\,dt+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,dt$.
求 $\int_0^1 f(x)\,dx$.

10. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\tan x)\,dx$
(2) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$
(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x+\sin x\cos x}\,dx$
(4) $\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\,dx$

11. (1) $\int_0^2 f(x)\,dx=0$ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.
证明至少存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使 $f(2-\xi)+f(\xi)=0$
构造辅助函数 $F(x)=\int_0^x f(2-t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$
(2) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续. $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x f(x)\,dx$.

推广应用

1. (1) $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt$
(2) $9y^2=x(x-3)^2$, $x\ge 0$, $x=3$.
(3) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$

12. $|\ln x|+|\ln y|=1$.

13. $x^2+xy+y^2=1$.

14. $y=x^2$. $S=\frac{1}{12}$.

15.

16. (1) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,dx$
(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$
(3) $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx$
(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$

17. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$