例题的重开

2021年11月24日 星期三 上午10:58

一、定积分的定义简单计算.

例. 求 $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

例. 将下列数列极限表示成积分.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\sqrt{n^2+1^2}}+\cdots+\frac{e}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

例. 试证 $0<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x(\pi-x)}}dx<\frac{\pi}{3}$.

二、变限积分

例. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中连续, 函数 $a(x), b(x)$ 在 $[c,d]$ 上中可导, 并满足 $a(x), b(x)\in[a,b]$. 试证求导公式:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

例. 求 $I=\int_1^3 \max(x,x^2)\,dx$.

例. 求极限 $L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{t\sin t}\,dt}{\int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt}$

1. 求 $f(x)=\sin\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^t \sin t^2\,dt\right)dy\right)$ 的导函数.

三、计算定积分

例. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $c,c\in\mathbb{R}$. 证:

(1) $\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_{2c-b}^{2c-a} f(2c-x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

例 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

例 假设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且对 $\forall x\in[a,b]$ 恒有 $f(a+b-x)=f(x)$, $g(a+b-x)+g(x)=B$. 试证: $\int_a^b fg=\frac{B}{2}\int_a^b f=A\int_a^b f=A\int_a^b f(x)$, $c=\frac{a+b}{2}$.

例. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数, 则对 $\forall a\in\mathbb{R}$, 有 $\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx=\int_0^T f(t)\,dt$

例. 计算 $I=\int_0^a \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

例. 求 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,dx}{1+x^2}$.

例. 对 $n\in\mathbb{N}$, 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

例. 求 $I=\int_0^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx$

1. $f(x)=\int_0^x[1+\sin(\sin t)]\,dt$. 求 $(f^{-1}(x))'$.

2. (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^M \arcsin x^n\,dx}{\sqrt{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+(n-1)}}\right)$

(3) $\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx$

四、可积性判断

五、推广的应用.

例. 试证 $\int_0^{\infty}\frac{(\ln(1+\sin x))^2}{x^2+1}dx$ 发散.

例. 讨论如下积分的敛散性.

(1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$. (2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$.

例. 计算 (1) $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx$, $(\alpha\in\mathbb{R})$

(2) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

例. 试证 (1) $\int_0^1\frac{1}{(1-x)(1-x^6)}dx=\pi$.

(2) $\int_0^1\ln^n x\,dx=(-1)^n n!$

例. $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的可积函数. 试证: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{nT}f(x)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$.

1. 求 $\int_0^1\frac{2\ln x}{(1-x)^2}dx=\int_0^1\ln x\,d\frac{1}{1-x}$

2. 证明 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}$ 收敛, 并求其值

1. $f\in R[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F\in C[a,b]\cap C'[a,b)$

2. 推广的积分中值.

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$. $g(x)$ 不变号, $\xi\in[a,b]$.

1. Cauchy-Schwarz 不等式.

f,g 在 $[a,b]$ 可积.

$\left(\int_a^b fg(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$

当且仅当 $f(x)=cg(x)$ 时候取等号.

2. Holder.

$f,g\in R[a,b]$. $p,q>1$. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\le\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$

3. Minkowski:

$f,g\in R[a,b]$. $p\ge 1$.

$\left(\int_a^b|f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

当且仅当 $f=cg$ 时取等.

反积分可借助柯西准则的敛散性.

例. $\frac{1}{n}\int_0^n\sin^2 x\,dx$

$=\frac{1}{n}\int_0^n\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^n=\frac{1}{2}$

交换电表次数文明年是平均年的平均值.

例. 将下列数列极限表示成积分.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\sqrt{n^2+1^2}}+\cdots+\frac{e}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

直接 $a_i=\frac{e}{\sqrt{n^2+i^2}}=\frac{e}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$,

是 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在 $[0,1]$ 上 n 等分割之下的一个 Riemann 和. (注取作法 1).

$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ldots$

例. 试证: $0<\int_0^{\pi}\frac{x}{\sqrt{x(\pi-x)}}dx<\frac{\pi}{3}$.

令 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $f(x)\ge g(x)$, 但 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$. 则有 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$.

MVT Thm

连续函数 $m\le f(x)\le M$

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

例. 求 $I=\int_0^3\max(x,x^2)\,dx$.

$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 0\\ x, & 0\le x<1\\ x^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$

$\therefore I=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{26}{3}=\frac{19}{2}$

例. $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\cos t}{\sin(xt)}dt$, 求 $f'(x)$.

$\frac{d}{dx}f(x)=\cos(2x)\cdot 2-\cos(\sin x)^2\cdot\frac{1}{x}\cos 1x$

$=2\cos 4x^2-\frac{1}{x}\cos(\sin x)^2$ 在 $x\in(0,+\infty)$

$\cos(x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续可导. $\sin x$ 同理可导.

例. 求极限 $L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{t\sin t}\,dt}{\int_0^x\sin\sqrt{t}\,dt}$

0/0 型极限 → 洛必达, 使用上限积分求导.

$L\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\sin x}}{\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{\sin\sqrt{x}}}=1$

1. $f(x)=\sin\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^t\sin z^2\,dt\right)dy\right)$. 求 $f'(x)$.

$f'(x)=\cos\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^t\sin z^2\,dt\right)dy\right)\cdot\sin\left(\int_0^x\sin t^2\,dt\right)$

看作 $f(x)=\sin\left(\int_0^x\varphi(y)\,dy\right)$,

$f'(x)=\cos\left(\int_0^x\varphi(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_0^x\varphi(y)\,dy\right)'$

$=\cos\left(\int_0^x\varphi(y)\,dy\right)\cdot\sin\varphi(x)$.

例. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 函数 $a(x), b(x)$ 在 $[c,d]$ 上中可导, 并满足 $a(x), b(x)\in[a,b]$. 试证求导公式:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

证明 取 $c\in[a,b]$, 则 $\int_c^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的一个原函数, 可记 $\varphi(x)$ 记 $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt=\int_c^{b(x)}f(t)\,dt-\int_c^{a(x)}f(t)\,dt$

$\therefore\frac{d}{dx}\ldots=\frac{d}{dx}\left(\int_c^{b(x)}f(t)\,dt-\int_c^{a(x)}f(t)\,dt\right)$

$=\frac{d}{dx}(\varphi(b(x))-\varphi(a(x)))$

$=\varphi'(b(x))\,b'(x)-\varphi'(a(x))\,a'(x)$

$=f(b(x))\,b'(x)-f(a(x))\,a'(x)$

例. 求 $I=\int_0^3\max(x,x^2)\,dx$.

$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 0\\ x, & 0\le x<1\\ x^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$

$\therefore I=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{26}{3}=\frac{19}{2}$

例. $m\in\mathbb{N}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$.

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)$

$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^m t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\,dt$.

例. 假设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且对 $\forall x\in[a,b]$ 恒有 $f(a+b-x)=f(x)$, $g(a+b-x)+g(x)=B$, 则证:

$\int_a^b fg=\frac{B}{2}\int_a^b f=A\int_a^b f+A\int_a^b f$. $(c=\frac{a+b}{2})$.

证明 [$f(a+b-x)=f(x)$ 对称.]

$I=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^c f(x)g(x)\,dx+\int_c^b f(x)g(x)\,dx$

$=\int_a^c f(x)g(x)\,dx+\int_a^c f(a+b-x)g(a+b-x)\,dx$ 应用

$=\int_a^c f(x)g(x)\,dx+\int_a^c f(x)(B-g(x))\,dx$

$=\int_a^c f(x)(g(x)+B-g(x))\,dx=\frac{B}{2}\int_a^c f(x)\,dx$.

$\int_c^b fg=\int_c^b f+\int_c^b f$ → 活用相等.

$\xlongequal{x=a+b-t}\int_c^b f(a+b-x)+\int_c^b f(x)$

$=\int_c^b f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

例. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数, 则证对 $\forall a\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_a^{a+T}f(x)\,dx\overset{①}{=}\int_0^T f(x)\,dx\overset{②}{=}\int_0^T f(t)\,dt$$

证明: $\int_a^{a+T}f=\int_a^0 f+\int_0^T f+\int_T^{a+T}f=I_1+I_2+I_3$

$I_3=\int_T^{a+T}f(x)\,dx\xlongequal{x=T+t}\int_0^a f(t+T)\,dx$

$=\int_0^a f(t)\,dt=\int_0^a f(x)\,dx=-I_1$. ① ✓.

$\int_0^T f(x)\,dx\xlongequal{x=T-t}\int_T^0 f(T-t)\,dx=\int_0^T f(t)\,dx$. 换元.

例. 计算 $I=\int_0^a\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

$I\xlongequal{x=a\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2 t\,dt}{a^3\sec^3 t}=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt$

$=\frac{1}{a^2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2a^2}$. 注意正负积分换元法的区别.

例. 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)\,dx}{1+x^2}$.

$I\xlongequal{x=\tan\theta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta$ $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta\,d\theta$ 换元

$=\frac{\pi}{8}\ln 2$. 原函数虽打不出来, 但可确定存在.

例. 对 $n\in\mathbb{N}$, 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

试证: $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\ge 2)$. $(I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1)$.

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\,d\sin x$

$=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\,dx$

$=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x-\cos^n x\,dx$

$=(n-1)I_{n-2}-I_n$ $\therefore I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

$\Rightarrow I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶}\end{cases}$

例. 求 $J=\int_0^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx$

$J=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\,dx^2=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\right)$

$=\frac{1}{2}\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3}{2}-\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi-\frac{3}{2}$.

1. $f(x)=\int_0^x[1+\sin(\sin t)]\,dt$. 求 $(f^{-1}(x))'$.

$f'(x)=\int_0^x[1+\sin(\sin t)]\,dt$.

$y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$.

$\therefore(f^{-1}(x))'=(f^{-1}(y))'_{y=x}=\frac{1}{f'(x)}\Big|_{y=x,\,x=0}$

$=\frac{1}{1+\sin(\sin x)}\Big|_{x=0}=1$

2. (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^M\arcsin x^n\,dx}{\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^M\arcsin(1-x)^n\times\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}{n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin x^n}{2n^{\frac{1}{2}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{2n^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+(n-1)}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(n-1)}{n}}}\right)$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-2$.

3. $\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx$

$=\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx+\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx$

$=\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx+\int_0^1 e^{(1-x)^2}\arctan(1-x)\,dx$

$=\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx+\int_0^1 e^{(1-x)^2}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan x\right)dx$

$=\int_0^1 e^{x^2}\arctan x\,dx+\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{(1-x)^2}dx-\int_0^1 e^{(1-x)^2}\arctan x\,dx$

$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{(1-x)^2}dx$

$e^{(1-x)^2}$

$=\int_0^1\frac{1+e^2-e^{(1-x)^2}}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+\frac{e^2}{1+(1-x)^2}-e^{(1-x)^2}\right)dx$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1+e^2}{2}-\int_0^1 e^{(1-x)^2}dx\right)$

$=\frac{\pi}{8}(1+e^2)-\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{(1-x)^2}dx$

4. $\int_0^{2\pi}x|\sin x|\,dx$

$=\int_0^{\pi}x|\sin x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}x|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}x(-\sin x)\,dx$

$=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\,dx=\cdots=(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx$

$\triangleq I_1+I_2+\cdots+I_n$

$I_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x|\sin x|\,dx$

$=\begin{cases}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx, & n\text{ 为奇}\\ -\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx, & n\text{ 为偶}\end{cases}$

$=\begin{cases}-x\cos x\Big|_{(n-1)\pi}^{n\pi}, & n\text{ 为奇}\\ -x\cos x\Big|_{(n-1)\pi}^{n\pi}, & n\text{ 为偶}\end{cases}$

$=\begin{cases}0-n\pi\times(-1)-0+(n-1)\pi\times(-1), & n\text{ 为奇}\\ -0+n\pi-0-(n-1)\pi\times(-1)=(2n-1)\pi, & n\text{ 为偶}\end{cases}$

$\therefore\int_0^{2n\pi}x|\sin x|\,dx=\frac{(1+2n-1)n}{2}\pi=n^2\pi$

5. $f(x)=\int_0^{3x}(1+e^{t^2}-e^{9-t})\,dt+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,dt$, 求 $f(x)$

$=\int_0^{3x}(1+e^{t^2}-e^{-(t-9)})\,dt+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,dt$

$=\int_0^{3x}1\,dt+\int_0^{3x}e^{t^2}\,dt-\int_0^{3x}e^{-(t-9)}\,dt$

$=3x+\int_0^{3x}e^{t^2}\,dt+\int_{-9}^{3x-9}e^{-(t-9)}\,d(t-9)$

$=3x+\int_0^{3x}e^{t^2}\,dt+\int_{-9}^{3x-9}e^{-t}\,dt=2x$.

$\therefore f(x)=2x+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,dt$.

两边在 $[0,1]$ 上求积分, 得

$\int_0^1 f(x)\,dx=2x+\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$\therefore\int_0^1 f(x)\,dx=2x+\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\ln|x+1|\Big|_0^1$

$\therefore\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2x}{1-\ln 2}$.

1. $f(x)$ 连续, $f(x)\ge 0$, $f'(x)$ 存在. 记 $F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$. 证明 $F(x)$ 处处可导, 并求 $F'(x)$.

$F(x)=\left(\int_0^x f(y)\,dy\right)'$, $x=0$

$\int_0^x f(y)\,dy=\int_0^1 f(x)\frac{1}{x}=\int_0^1 f(x)\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(x)\,dx$, $x\ne 0$.

$x\ne 0$ 处, $F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{f(x)}{x}=\frac{xf(x)-\int_0^1 f(x)\,dx}{x^2}$.

$x=0$ 处, $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x)\,dx}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0)$.

2. 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(x)>0$. 求证:

$\int_0^1|f(x)|^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)|f(x)|^2dx$. $f\in C^1$ 取等.

$F(x)=\int_0^x|f(x)|^2dx$. $F'(x)=|f(x)|^2$.

$\int_0^1(1-x)|f(x)|^2dx=\int_0^1(1-x)\,dF(x)$

$=(1-x)F(x)\Big|_0^1-\int_0^1F(x)\,d(1-x^2)$

$=0F(1)-1\times F(0)+\int_0^1F(x)\,2x\,dx=2\int_0^1xF(x)\,dx$

$xF(x)=x\int_0^x|f(x)|^2dx\ge\int_0^x1\times|f(x)|^2dx$

$=\int_0^x|f(x)|^2dx=|f(x)|$.

$\therefore\int_0^1xF(x)\,dx\ge\int_0^1|f(x)|\,dx$

3. $f(x)$ 在 $[0]$ 上可积, $f(x)>0$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, 求证:

$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\le\int_0^1|f(x)|^2dx$, 当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$.

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(1-x)f(x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,d(1-x^2)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(f(x)(1-x^2)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)(1-x^2)\,dx\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f'(x)(1-x^2)\,dx\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f'(x)^2dx\right)\left(\int_0^1(1-x^2)^2dx\right)$

$=\frac{1}{15}\int_0^1|f'(x)|^2dx$.

4. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, $0\le f(x)\le 1$. 求证: $2\int_0^1 xf(x)\,dx\ge\int_0^1 f(x)\,dx\Big)^2$.

$F(x)=2\int_0^x tf(t)\,dt-\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$

$F'(x)=2xf(x)-2\int_0^x f(t)\,dt-f(x)$

$=2xf(x)\left[x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$

$=2xf(x)\int_0^x(1-f(x))\,dt\ge 0$

$\therefore F(x)\uparrow$. $F(1)=F(0)=0$.

若 $\exists x_0$ 使 x_0 为 $F(x)$ 的 $F'(x_0)=0$, $f(x_0)=0$ 或 1.

$f(x)\in C[0,1]$. $|f(x)|\le\int_0^1|f(x)\,dx|=\int_0^1|f'(x)|\,dx$

$\int_0^1|f(x)|\,dx\ge\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=|f(1)-f(0)|$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. $F'(x)=f(x)$

$|F'(x)|\le|F(x)|+|F'(x)-F(x)|$

$|F'(x)|-|F'(x)|\le|F'(x)-F'(x)|$

例. $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 $f\circ g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明: $f\circ g$. $g\circ x$ 可积 $\Rightarrow$ 在 $[a,b]$ 有界.

$\exists M>0$, $\forall x\in[a,b]$, $|f\circ x|<M$, $|g\circ x|<M$

由 $|f\circ x|g\circ x-f\circ g\circ x|$

$=|f\circ x|g(x)-g(x)+g(x)|f\circ x-f\circ x|$

$\le M|g(x)-g\circ x|+M|f\circ x-f\circ x|$.

$f\circ g\circ x$ 可积, 对 $\forall\varepsilon$, $\exists\delta_1$, 当 $T<\delta_1$ 时, 有 $\sum_{i=1}^{n}w_i|g\circ x|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}$, $\sum_{i=1}^{n}w_i|f\circ x|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}$.

$\therefore$ 对 $\sum_{i=1}^{n}w_i|f\circ g|\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}w_i|f\circ x\circ g-f\circ g\circ x\circ g|\Delta x_i$

$\le\sum_{i=1}^{n}(M|g\circ x-g\circ x\circ x|\Delta x_i+M|f\circ x-f\circ x\circ x|)\Delta x_i$

$=\sum_{i=1}^{n}M\,w_i|g\circ x|\Delta x_i+M\sum_{i=1}^{n}w_i|f\circ x|\Delta x_i$

$=M\sum_{i=1}^{n}w_i|g\circ x|\Delta x_i+M\sum_{i=1}^{n}w_i|f\circ x|\Delta x_i<\varepsilon$.

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积.

证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则有 $\forall\varepsilon$, $\exists\delta_1$, 当 $T<\delta_1$ 时, $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$.

而 $\sum_{i=1}^{n}|f(x)-f(x_i)|\Delta x_i<\varepsilon$.

又 $\because||f(x)|-|f(x_i)||\le|f(x)-f(x_i)|$,

$\therefore\sum_{i=1}^{n}||f(x)|-|f(x_i)||\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}|f(x)-f(x_i)|$

根据夹逼定理, 有 $\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}w_i(|f|)\Delta x_i=0$. 可积.

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 且 $|f(x)|\ge c>0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积.

证明 [倒数性: $w(\frac{1}{f})=\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_i)}\right|=\left|\frac{f(x_i)-f(x)}{f(x)f(x_i)}\right|$

$\le\frac{1}{c^2}|f(x)-f(x_i)|=\frac{1}{c^2}w(f)$

$\therefore$ 对 $\forall T$ 都有 $\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}w(f)\Delta x_i=0$.

$\because\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}w(\frac{1}{f})\Delta x_i\le\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}w(f)\cdot\frac{1}{c^2}\Delta x_i$

夹逼 $\Rightarrow\lim_{T\to 0}$ 可积.

例. 试证 $\int_0^{\infty}\frac{(\ln(1+\sin x))^2}{x^2+1}dx$ 发散.

证明: $x\in[1,+\infty)$ 时,

$f(x)=\frac{(\ln(1+\sin x))^2}{x^2+1}\ge\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2x}$.

取对数 $p>1$, 则有

$\int_1^{+\infty}f(x)\,dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^{+\infty}$ (调和级数)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|x|}{x^p}=0$, $\therefore\int_1^{+\infty}f(x)\,dx=+\infty$.

例. 讨论如下积分的敛散性.

(1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$. (2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$.

(1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\Big|_0^1=-\ln|\ln x|\Big|_0^1$

$=-\ln|\ln 1|+\ln|\ln 0|=+\infty$ 发散.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=+\infty$ 发散.

例. 讨论 (1) $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx$, $(\alpha\in\mathbb{R})$

(2) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

(1) $I=\int_0^2\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx$

$=\int_0^2\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx$ 应用常 α 型.

$=\int_0^2\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}dx$

$=\int_0^2\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{8}$.

(2) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$

$=x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

令 $x=2t$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)\,2dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\,dt$ $dx=\frac{1}{2}-x$

$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)\,dt$

$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t))\,d(\frac{\pi}{2}-t)$

$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt$

$=\frac{\pi}{2}\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+J$

$\therefore J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

例. 试证 (1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[6]{(1-x)(1-x^6)}}dx=\pi$.

(2) $\int_0^1\ln^n x\,dx=(-1)^n n!$

证明: $\eta-\xi=(b-a)\cos\frac{\pi}{n}$, $0<\xi<\eta$.

则 $b-\eta=(b-a)-(\eta-a)=(b-a)e^{i\theta}$.

$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(b-a)\cos t\,dt}d(i(b-a)\sin t+a)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{i(b-a)\cos t}{(b-a)\cos t}dt=\pi$.

(2) $I_n\ge 1$.

$I_n=\int_0^1\ln^n x\,dx=x\ln^n x\Big|_0^1-\int_0^1 x\,d(\ln^n x)$

$=-\int_0^1 x\cdot n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx=-n\int_0^1\ln^{n-1}x\,dx$

$=-n\cdot I_{n-1}=-=(-1)^n n!\,I_0=(-1)^n n!\,I_n$.

例. $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的可积函数. 试证: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{nT}f(x)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$

$=\frac{1}{n}\int_1^n f(x)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^{nT}f(x)\,dx-=\frac{1}{n}\int_0^{nT}f(x)\,dx$.

$\int_0^{nT}f(x)\,dx=$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n f(x)\,dx}{