原函数及基本计算方法

2021年9月23日 星期四　下午2:37

一、不定积分的概念.

1. 定义：设 $f(x)$ 在 I 上有定义. 如果存在 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$, $x\in I$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数. → $dF(x)=f(x)dx$

2. 特点：① 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)+c$ 也是 $f(x)$ 的原函数.

② 若 $f(x)$ 有两个原函数 $F_1(x)$. $F_2(x)$，则 $F_1'(x)-F_2'(x)=0$, $F_1(x)-F_2(x)=C$.

即 $f(x)$ 如果有原函数 $F(x)$，则 $\{F(x)+c\}$ 都是原函数. 记为 $\int f(x)dx$.

$F'(x)=f(x)$
$dF(x)=F'(x)dx$
$\int f(x)dx=\int dF(x)$

例：求 $f(x)=x$ 的原函数.

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$.

3. 定理：若 $f(x)$ 在 I 连续，则 $f(x)$ 在 I 有原函数.

例. $\int 0\,dx=c$.

$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$.

$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c \quad (a>0 且 a\neq 1)$

$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+c$

$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

$\int \cos x\,dx=\sin x+c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

4. 对初等函数 $f(x)$，如果 $\int f(x)dx$ 为初等函数，则称 $f(x)$ 可以"积出来". 即初等函数的不定积分可以不初等.

二、基本性质.

$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$.

$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

例. $\int \frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$

$=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{1}{\sin^2x}dx$

$=\tan x-\cot x+c$　① 求导 ② 常数 c.

$\int\frac{x^2-3x+1}{x+1}dx$

$=\int\left(x-4+\frac{5}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}(x-4)^2+5\ln(x+1)+c$.

三、换元积分法（复合函数求导逆运算）

①
$$\begin{tikzcd} f(u) \arrow[r, "\text{若积分}"] & F(u) \arrow[d, "u=\varphi(x)"] \\ f(\varphi(x))\varphi'(x) & F(\varphi(x)) \arrow[l, "\text{则微分}"'] \end{tikzcd}$$
（即 $F'(u)=f(u)$）

$dF(\varphi(x))=\left(\frac{dF(\varphi(x))}{dx}\right)dx=F'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$
$=f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

②
$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[d, "x=\varphi(t)"] & F(x)=G(\varphi^{-1}(x)) \arrow[l, "\text{则微分}"'] \\ g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t) & G(t) \arrow[l, "\text{若微分}"'] \arrow[u, "t=\varphi^{-1}(x)"'] \end{tikzcd}$$

$d(G(\varphi^{-1}(x)))=\frac{dG(\varphi^{-1}(x))}{dx}dx=G'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(t)}dx$
$=G'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\varphi'(t)dt$

例 $\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+c$.
$=-\ln|\cos x|+C$.

例. $\int\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}\,d(\ln x+1)=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+C$
$=2\sqrt{\ln x+1}+C$.

x 与 dx 构成一起凑微分.
$\ln x+c$ 都满足可用于凑. 直接使用 $\ln x+1$.
积分区间 $(\frac{1}{e},+\infty)$

$=\int\frac{1}{\sqrt{1+u}}du=\int(1+u)^{-\frac{1}{2}}du=$

$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int\frac{u}{\sqrt{1+u}}du=\int\frac{1+u-1}{\sqrt{1+u}}du$
$=\int\frac{1+u}{\sqrt{1+u}}du-\int\frac{du}{\sqrt{1+u}}=\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}-2(1+u)^{\frac{1}{2}}+c$

例 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx \overset{\sqrt{x}=t^3,\ x=t^6}{=} \int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt$
$dx=6t^5dt$

$=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt=6\int dt-6\int\frac{dt}{1+t^2}=6t-6\arctan t+C$
$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$

例 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x=a\sin u}{\underset{dx=a\cos u\,du.}{=}} \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2u}\;a\cos u\,du$

$=\int a\cos u\cdot a\cos u\,du=\int a^2\cos^2u\,du.\quad u\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
$=a^2\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{4}\sin 2u+C.$
$u=\arcsin\frac{x}{a}$　$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\sin 2\arcsin\frac{x}{a}+c.$

例 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

定义域两部分 → 函数分段.
x^2-a^2 → 联想双曲函数性质.

令 $x=a\cosh u=a\frac{e^u+e^{-u}}{2}$. $dx=a\frac{e^u-e^{-u}}{2}du$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{\frac{e^u-e^{-u}}{2}du}{\sqrt{a^2\frac{e^{2u}+e^{-2u}+2}{4}-a^2}}=\int\frac{\frac{e^u-e^{-u}}{2}du}{a\frac{e^u-e^{-u}}{2}}=\int\frac{du}{a}=\frac{u}{a}+c$

$x=a\frac{e^u+e^{-u}}{2}\Rightarrow e^{2u}-2axe^u+1=0,\ e^u=ax\pm\sqrt{a^2x^2-1}.$

$\therefore u=\ln(ax+\sqrt{a^2x^2-1})$. 原式 $=\frac{\ln(ax+\sqrt{a^2x^2-1})}{a}+c$.

例 $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$

S_1. $x\neq0$ 时, $\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}$
$=\int\frac{du}{3+u^2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+(\frac{u}{\sqrt3})^2}=\frac{1}{3}\int\frac{\sqrt3\,dv}{1+v^2}$
$=\frac{1}{\sqrt3}\arctan v+c=\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt3}+c\quad(x\neq0)$.

记 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt3}+C_1 & x>0\\ C' & x=0\\ \frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt3}+C_2 & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=-\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{2}+C_1$, $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{2}+C_2$.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义 ⇒ $F(x)$ 在 $x=0$ 可导
$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=F(0)$.
$\therefore C_1=C'+\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{2}$, $C_2=C'-\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{2}$.

S_2. $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$
$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx$
$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)dx$

$\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$　　$\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$

$=\frac{4}{3}\int\frac{du}{1+\frac{4}{3}u^2}=\frac{4}{3}\int\frac{\frac{\sqrt3}{2}dt}{1+t^2}$　　$=\frac{4}{3}\int\frac{du}{1+\frac{4}{3}u^2}=\frac{4}{3}\int\frac{\frac{\sqrt3}{2}dt}{1+t^2}$

$=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt3}{2}\arctan t$　　$=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt3}{2}\arctan t$

$=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt3}(x+\frac{1}{2})$　　$=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac{1}{2})$

原式 $=\frac{\sqrt3}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt3}(x+\frac{1}{2})+\frac{\sqrt3}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac{1}{2})$

四、分部积分

$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$d(uv)=vdu+udv$

$\Rightarrow\int(uv)'dx=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx$.

$u(x)v(x)=\int u'vdx+\int v'udx$

或 $\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$

$(u'dx=du,\ v'dx=dv)\Rightarrow$ **$uv=\int udv+\int vdu$**

例. $\int\underset{u}{\ln x}\,\underset{dv(x)}{dx}\to\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$
$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$

例. $I=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}\int\sin bx\,de^{ax}$.

$=\frac{1}{a}[\sin bx\,ae^{ax}+\int\cancel{a}e^{ax}b\cos bx\,dx$
$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int\cos bx\,de^{ax}$　e^x 好转化
$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\cos bx\,e^{ax}+\frac{b}{a^2}\int be^{ax}(-\sin bx)dx$
$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\cos bx\,e^{ax}-\underbrace{\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{I}$
$I=\frac{1}{2}(\qquad)$.

例 $\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$

$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\int u(x)dv(x)$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int x\frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$
$\therefore 2na^2I_{n+1}=(2n-1)I_n+\frac{x}{(x^2+a^2)^n}$
又 $I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.
依次递推.

例. $\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx$.

$=-2\int x\,d\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}=-2\frac{x}{\sqrt{1+e^x}}-(-2)\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
$=-2\frac{x}{\sqrt{1+e^x}}+4\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-2x+C$.

一、概念.

1. 原函数. $F'(x)=f(x)$, $F(x)$ 为原函数.

2. 不定积分. $f(x)$ 原函数全体. $\int f(x)dx=F(x)+C$.

二、计算.

1. 根据初等函数积分计算.

例. 求 $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$.

$k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$. 或 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi$.

$\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x\sin^2x}=\int(\csc^2x+\sec^2x)dx$
$=\tan x-\cot x+C$.

2. 换元积分法.

(1) 第一换元法.（凑微分法）

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))\,d(\varphi'(x))=\int f(u)du$　$u=\varphi(x)$, 取一个即可.
$=F(u)+C=F(\varphi(x))+C$.

(2) 第二换元法.

$\int f(x)dx\overset{x=\varphi(t),\ \varphi'(t)\neq0}{=}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)+C$
$\overset{t=\varphi^{-1}(x)}{=}G(\varphi^{-1}(x))+C$.

例. $\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

二换法
令 $t=\sqrt{e^x+1}$, $x=\ln(t^2-1)=\varphi(t)$, $\varphi'(t)\neq0$

$\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{1}{t}d(\ln(t^2-1))=\int\frac{1}{t}\times\frac{2t}{t^2-1}dt$
$=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$　拆分
$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C$
$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$
$=\ln\left|\frac{(\sqrt{e^x+1}-1)^2}{e^x+1-1}\right|+C$
$=2\ln(\sqrt{e^x+1}-1)-x+C$.

例. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$. $(a>0)$.

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx\overset{x=a\sin t}{\underset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=}}\int a\cos t\,d(a\sin t)=\int a^2\cos^2t\,dt$
$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos2t)dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin2t+C$
$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

例. 求证：(1) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

(2) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$, $x>a$.

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C$, $x<-a$.

证明：(1) 令 $x=a\sinh t$（指数代选双曲）.
$\varphi'(t)=a\cosh t>0$.
$\int\frac{1}{\sqrt{a^2(\sinh^2t+1)}}d(a\sinh t)=\int\frac{a\cosh t}{a\cosh t}dt$
$=\int1dt=t+C_0=\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+C_0$
$=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}\right)+C_0=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.
其中 $C=C_0-\ln a$.（写出来）

(2). $x>a$. 令 $x=a\cosh t$　$t>0$, $\varphi'(t)=a\sinh t>0$.
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2(\cosh^2t-1)}}d(a\cosh t)$
$=\int\frac{a\sinh t}{a\sinh t}dt=\int1dt=t+C_0$
$t=\operatorname{arccosh}\frac{x}{a}=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}\right)$
$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C\ (C=C_0-a)$.

(3) $x<-a$, 令 $x=-m$, $m>a$.
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{(-1)}{\sqrt{m^2-a^2}}dm=-\ln(m+\sqrt{m^2-a^2})+C_0$
$=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C_0$
$=\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)+C_0$
$=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{x^2-a^2-x^2}\right)+C_0$
$=\ln\left(\frac{-\sqrt{x^2-a^2}-x}{a^2}\right)+C_0$
$=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C.\ (C=C_0-2\ln a)$

也可用 $x=-a\cosh t$, $t>0$ 证.

公式：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+B}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+B}|+C$.

例. 记 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le2\\ x^2, & x>2.\end{cases}$ 求 $\int f(x)dx$. $x\in(-\infty,+\infty)$.

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数 $F(x)$ 应满足
$F(x)=\begin{cases}x^2+C & x\le2\\ \frac{1}{3}x^3+C_0 & x>2.\end{cases}$　寻找 C. C_0 使 $F(x)$ 连续.
且 $F(2-0)=4+C=F(2+0)=\frac{8}{3}+C_0$, $C_0=\frac{4}{3}+C$.
∴ 原函数表示为 $F(x)=\begin{cases}x^2+C & x\le2\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}+C. & x>2.\end{cases}$
（或 $F_0(x)=\begin{cases}x^2\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}\end{cases}$, $F(x)=F_0(x)+C$.）

3. 分部积分法

假设 u. v 在 I 中可导, 且 $u'(x)v(x)$ 在 I 中有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 在 I 中有原函数. 且
$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)u'(x)dx$.

例. $\int x^2\ln x\,dx$.
$=\int\underbrace{\ln x}_{u(x)}\,d\underbrace{(\frac{x^3}{3})}_{v(x)}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v(x)}d\underbrace{(\ln x)}_{u(x)}$　x 凑微分
$=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{9}x^3+C$.

例. $\int x\arctan x\,dx$
$=\int\arctan x\,d(\frac{1}{2}x^2)=\arctan x\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{2}x^2d(\arctan x)$
$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$
$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\left(\int1dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right)$
$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x$.

例. $\int\arctan x\,dx$
$=\int\underset{v(x)}{\arctan x}\,\underset{u(x)}{dx}=x\cdot\arctan x-\int x\,d(\arctan x)$
$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=\ \cdots$

直接积分. $\int f(x)dx=xf(x)-\int x\,d(f(x))$

例. $a\neq0$, $b\neq0$, 求 $I=\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$,
$J=\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$.

$I=\int\frac{1}{a}\sin bx\,d(e^{ax})=\frac{1}{a}\int\sin bx\,d(e^{ax})$
$=\frac{1}{a}(\sin bx\,e^{ax}-\int e^{ax}d(\sin bx))$
$=\frac{1}{a}\sin bx\,e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}b\cos bx\,dx$
$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J$. ①

同理, $J=\frac{1}{a}\int\cos bx\,d(e^{ax})$
$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}(-1)b\sin bx\,dx$
$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I$. ②

由①.②联立方程组可解.

对复值函数 $\lambda_0=ai+b$. $\int e^{\lambda_0x}dx=\frac{1}{\lambda_0}e^{\lambda_0x}+C$.

$\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx=\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$.

例. 对 $n=0,1,2..$ 记 $I_n=\int x^ne^xdx$, 求 I_0 以及 I_n 的递推式.

$I_0=\int e^xdx=e^x+C$.
$I_n=\int x^ne^xdx=\int x^n\,d(e^x)=x^ne^x-\int e^xd(x^n)$　降幂用
$=x^ne^x-\int e^x\cdot nx^{n-1}dx=x^ne^x-nI_{n-1}$.

例. $A\neq0$, $B\neq0$, 在函数 Ax^2+B 的正值开区间内成立 $\int\sqrt{Ax^2+B}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{Ax^2+B}+\frac{B}{2}\int\frac{1}{\sqrt{Ax^2+B}}dx$.

证明: $\int\sqrt{Ax^2+B}\,dx=x\sqrt{Ax^2+B}-\int x\frac{2Ax}{2\sqrt{Ax^2+B}}dx$
$=x\sqrt{Ax^2+B}-\int\frac{(Ax^2+B)-B}{\sqrt{Ax^2+B}}dx$
$=x\sqrt{Ax^2+B}-\int\sqrt{Ax^2+B}\,dx+\int\frac{B}{\sqrt{Ax^2+B}}dx$.
解得 $\int\sqrt{Ax^2+B}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{Ax^2+B}+\frac{B}{2}\int\frac{1}{\sqrt{Ax^2+B}}dx$.

例. 记 $I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$, $n=1,2\ldots$
证明递推式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$.

证明: $n=1$, $I_1=\int\frac{1}{(x^2+a^2)}dx=\int\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx$
$=\int\frac{1}{a}\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d(\frac{x}{a})=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

$I_n=x\frac{1}{(x^2+a^2)^n}-\int x\,d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\cdot\frac{(-n)\times2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}-\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right)dx$
$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$

例. $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

$=\int\frac{(1+x)-1}{(x+1)^2}e^xdx$　拆分　$=\int\frac{1}{(x+1)}e^xdx+\int e^x\frac{1}{(x+1)^2}dx$
$=\int\frac{e^x}{(x+1)}dx-\int e^xd\left(\frac{1}{x+1}\right)$　分部.
$=\int\frac{e^x}{x+1}dx+\frac{e^x}{x+1}-\int\frac{1}{(x+1)}d(e^x)$
$=\int\frac{e^x}{(x+1)}dx+\frac{e^x}{x+1}-\int\frac{e^x}{x+1}dx=\frac{e^x}{x+1}+C$.

/ $\int\frac{1}{x+1}de^x-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$　分部
$=\frac{e^x}{x+1}-\int e^xd\left(\frac{1}{x+1}\right)-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$
$=\frac{e^x}{x+1}+\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx=\frac{e^x}{x+1}+C$.