Taylor展开

2021年10月30日 星期六　　下午8:03

一、Taylor 公式.

1. 分析.

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=T_1+o(x-x_0)$

其中 $T_1=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，为切线.

$f(x)=T_2+o((x-x_0)^2)$，

设 $T_2=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$

原函数：令 $x=x_0$，$a_0=f(x_0)$.

一阶导：$f(x)=f(x_0)+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$，

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a_1-a_2(x-x_0)=\frac{o((x-x_0)^2)}{x-x_0}$

$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a_1-a_2(x-x_0)\right]$

$=f'(x_0)-a_1=0$，即 $a_1=f'(x_0)$.

二阶导：$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}-a_2=\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}$.

$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=a_2$，即 $\frac{1}{2}f''(x_0)=a_2$.

$\therefore T_2=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2$.

2. 公式.

$f(x)$ 有n阶导数，则 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$，

其中 $T_n(x)$ 为多项式 $a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$，

则系数 $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$，$k=0,1,\cdots,n$.

证明：$f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)$

令 $x\to x_0$，则有 $a_0=f(x_0)$.

假设 $n=k$ 时，$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 成立.

$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{k+1}}=\frac{o((x-x_0)^{n+1})}{(x-x_0)^{k+1}}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{k+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{(k+1)(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-T_n''(x)}{(k+1)k(x-x_0)^{k-1}}$

$=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(k+1)}(x)-T_n^{(k+1)}(x)}{(k+1)!(x-x_0)}=f^{(k+1)}(x_0)-(k+1)!\,a_{k+1}=0$.

若 $x_0=0$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

(Maclaurin 展开).

二、余项的估计.

1. 定义：

若 $f(x)$ 在 x_0 处n阶可导，则称 $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的n次Taylor多项式，称 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 为n次相差项或剩余项.

2. 定理：

① 带Peano余项的Taylor公式.

$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$，$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$，

n阶可导，则 $f(x)$ 和 $T_n(x)$ 的相差部分为 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量.

证明：只需证 $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$

其中 $R_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$

$\therefore\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0-x)}{n!(x-x_0)}$

$=\frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right]$

$=\frac{1}{n!}\times\left[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right]=0$.

② 带Lagrange余项的Taylor公式.

若 $f(x)$ 在 I 中 n+1 阶可导，则对 $\forall x_0,x\in I$，

$\exists\xi\in(x_0,x)$，使 $f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，

即余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

证明：取 x,x_0 为固定的常数，

构造 $g(t)=R_n(t)-\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1}$.

则 $g(t)$ 在区间 (x_0,x) 上 n+1 阶可导.

$\left.\frac{d^k}{dt^k}t^n\right|_{t=0}=0$

$\left.\frac{d^k}{dt^k}(t-x_0)^n\right|_{t=x_0}=0$

又有 $g(x)=R_n(x)-R_n(x)=0$，

$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$.

$g(x_0)=g'(x_0)=\cdots=g^{(n-1)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)=0$.

$\therefore\exists\xi_0\in(x_0,x)$，$g'(\xi_0)=0$.

$\therefore\exists\xi_1\in(x_0,\xi_0)$，$g''(\xi_1)=0$.

……

$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$

$x_0=0$，$\xi=\theta x$.

$\therefore\exists\xi_{n-1}\in(x_0,\xi_{n-2})$，$g^{(n)}(\xi_{n-1})=0$

$\therefore\exists\xi\in(x_0,\xi_{n-1})$，$g^{(n+1)}(\xi)=0$.

$\therefore g^{(n+1)}(\xi)=R_n^{(n+1)}(\xi)-\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(n+1)!$

$=f^{(n+1)}(\xi)-0-\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(n+1)!=0$，

即 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

3. 应用.

① $x_0=0$ 时，将Taylor展式称作Maclaurin展式.

e^x. $\cos x$. $\sin x$. $\ln(1+x)$. $(x+1)^\alpha$.

例. 求 $f(x)=e^{-x^4}$ 的 4n 次 Maclaurin 展式.

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+o(t^n)\ (t\to0)$

[e^t 带Peano余项的Maclaurin展式].

代入 $t=-x^4$，$e^{-x^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x^4)^k}{k!}+o((-x^4)^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kx^{4k}}{k!}+o(x^{4n})$.

推论：$f^{(4k+1)}(0)=f^{(4k+2)}(0)=f^{(4k+3)}(0)=0$.

$f^{(4k)}(0)=(4k)!\frac{(-1)^k}{k!}$

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

$f^{(k)}(x_0)=k!\,a_k$. [$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}=a_k$，Taylor系数]

例. 求 $\cos^2x$ 的 2n 阶 Maclaurin 公式.

$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$. $\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n)!}+o(t^{2n})$.

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!}+o((2x)^{2n})$

系数合并.

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$.

$=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})\ (x\to0)$.

推论：$\left.\frac{d^k}{dx^k}\cos^2x\right|_{x=0}$，k为奇，导为0.

例. 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x_0=-3$ 处的n阶Peano展式.

[$x^{-1}\to$ 变相似于 $(1+x)^\alpha$，展式如 $\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$

$x_0=-3$. $(x-(-3))^k=(x+3)^k$.]

$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{-3+(x+3)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x+3}{-3}}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+3}{3}}$.

$\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kt^k+o(t^n)\ (t\to0)$.

$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{n}t^k+o(t^n)\ t\to0$.

$\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x+3}{3}\right)^k+o\left(\left(-\frac{x+3}{3}\right)^n\right)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+3)^k}{3^{k+1}}+o((x+3)^n)$.

Taylor 公式.

1. 在 x_0 的展开. Peano & Lagrange.
2. 利用Maclaurin展式求其他函数展式.
3. 证明相关不等式.

例. $f(x)$ 在[0,1]二阶可导，对 $\forall x$ 有 $|f''(x)|\le M$，且 $f(0)=f(1)=0$. 求证：[0,1] $|f(x)|\le\frac{M}{8}$.

证明：分别写出 $f(0)$，$f(1)$ 在 $x_0\in[0,1]$ 的展式 一阶带余展式

$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{f''(\xi_1)(-x_0)^2}{2}$ ①

$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)(1-x_0)^2}{2}$ ②

条件一阶 消除0阶 消去一阶

①$\times(1-x_0)$ + ②$\times x_0$，$0=-f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)(-x_0)^2(1-x_0)}{2}+\cdots$

$\therefore|f(x_0)|\le\frac{M}{2}x_0^2(1-x_0)+\frac{M}{2}(1-x_0)^2x_0$

$=\frac{M}{2}x_0(1-x_0)\le\frac{M}{2}\left(\frac{x_0+(1-x_0)}{2}\right)^2=\frac{M}{8}$.

例. 试证 1) 当 $x\ne0$ 时，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

2) 当 $0<x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$1-\frac{1}{2}x^2<\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$.

证明：1) $x\ne0$ 时，由 e^t 在 $t=0$ 处的三阶Maclaurin

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^{\theta x}x^4}{24}>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

2) $x\ne0$ 时，由 $\cos x$ 在 $t=0$ 处的Maclaurin展式.

三阶 $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+R_3=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\cos\theta x\cdot x^4}{24}$

五阶 $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+R_5=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{\cos\theta x}{720}x^6$

$x\in(0,\frac{\pi}{2}]$，$\theta\in(0,1)$，$R_n>0$.

$\therefore1-\frac{1}{2}x^2<\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$.

推广：左端展至4k−1阶，右端展至4k+1阶.

4. 计算极限.

例. 试确定a, b的值使得 $e^{1-\cos x}-1-ax^2-bx^4=o(x^4)\ (x\to0)$.

证明：$\Leftrightarrow\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\cos x}-1-ax^2-bx^4}{x^4}=0$.

令 $t=1-\cos x=1-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]$，

$t=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$，$t\sim\frac{1}{2}x^2$，$t^2\sim\frac{1}{4}x^4$.

$e^{1-\cos x}=e^t=1+t+t^2+o(t^2)$ 只需展至2阶.

$=1+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]^2+o(x^4)$

$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$

代入得 $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4+o(x^4)-1-ax^2-bx^4=o(x^4)$

$\Leftrightarrow(\frac{1}{2}-a)x^2+(\frac{1}{12}-b)x^4=o(x^4)$.

需要 $\frac{1}{2}-a=0$，$\frac{1}{12}-b=0$. $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{12}$.

* Peano余数唯一：$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=o(x^n)$.

当且仅当 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$.

例. (1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{(\arcsin x)^4}$.

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x\cos3x}{\cos^2x-\cos x}$.

解：(1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{(\arcsin x)^4}$ → 简化，x^4. 4阶无穷小 ← 分子展4阶.

$=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}+2(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})-3+o(x^4)}{x^4}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3+x^2-x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{12}-3+o(x^4)}{x^4}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{7}{12}+o(1)=\frac{7}{12}$.

* $x\to x_0$ (去心邻域)下，$f(x)$ 恒不为零.

$f\cdot o(g)=o(fg)$ ($\frac{1}{x^4}o(x^4)=o(1)$).

(2) 先判断阶数：

分母 $\cos^2x-\cos x=1-\frac{1}{2}(x^2)^2+o(x^4)-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))$.

$=1-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2-o(x^2)$

$=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to0)$.

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x\cos3x}{\cos^2x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-[1-\frac{4}{2}x^2+o(4x^2)][1-\frac{9}{2}x^2+o(3x^2)]}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4}{2}x^2+\frac{9}{2}x^2+9x^4+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{13}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=13$. $\sim\lim_{x\to0}\frac{\frac{13}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2}$.

例. 设 $f(x)$ 在 x_0 处的n阶微商存在，且：

$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)\ne0$，

(n阶极值) 若n为奇数，则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值；若为偶数，则 $f(x)$ 在 x_0 处有极值，且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 极小，$f^{(n)}(x_0)<0$ 极大.

证明：令 $\Delta f(x)=f(x_0+h)-f(x_0)$. 理解为x.

则 $\Delta f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+f''(x_0)\cdot h+\cdots+f^{(n-1)}(x_0)h$

$+\frac{f^{(n)}(\xi)h^n}{n!}+o(h^n)-f(x_0)$.

$=\frac{f^{(n)}(\xi)h^n}{n!}+o(h^n)$

$=h^n\left(\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}+o(1)\right)$.

n为奇，h变号(x_0两侧)时 h^n 变号，

而 $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}+o(1)$ 不变号，

使 $\Delta f(x)$ 也在 x_0 两侧变号.

故此时 x_0 不为极值点.

n为偶，h变号时 h^n 不变号，

因此 $\Delta f(x)$ 在 x_0 两侧也不变号.

$f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$\Delta f(x)\ge0$，

即在 $x=x_0$ 处取极小值.

$f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$\Delta f(x)\le0$，

即在 $x=x_0$ 处取极大值.

3. 推论.

① $f(x)$ 有 n+1 阶导，

如果 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)=0$，$f^{(n+1)}(x_0)\ne0$，

则 $\exists g(x)$，$g(x_0)\ne0$，使 $f(x)=(x-x_0)^rg(x)$.

称 x_0 是 $f(x)$ 的r重零点.

证明：$f(x)=\cancel{f(x_0)}+\cancel{f'(x_0)}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{r+1}(x-x_0)^r$

$+\cdots+R_n$

$=\underbrace{(x-x_0)^r}_{提出}\,\underline{g(x)}$.

② $f'(x_0)=0$，驻点.

$f''(x_0)\ne0$，极值点. $f''(x_0)=0$ x.

$f'''(x_0)$ (奇次)，无法判断 $f(x)-f(x_0)$ 正负.

$f^{(2k)}(x_0)\ne0$，可判断 $f(x)-f(x_0)$ 正负.