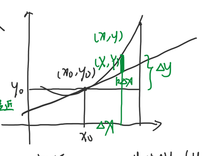
# 微分

2021年8月18日 星期三 下午3:30

## 一、定义

1. 引入



直线 $L: y = kx + b$，$Y = y_0 + k(x - x_0)$ 为切线

作差
$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

$$\therefore f(x) = f(x_0)\Delta x + f(x_0) + o(\Delta x)$$

2. 定义：若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的增量可以表示为……，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微。记为 $dy = df(x) = A\Delta x$

3. 定理：函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微 $\Leftrightarrow$ 可导，$A = f'(x_0)$（仅对一元函数成立）

证明：$f(x) = A\cdot\Delta x + f(x_0) + o(\Delta x)$

$\therefore f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$

$\therefore \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1)$

即 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A = f'(x)$

4. 运算：$dy = d(f(x)) = f'(x)dx$，与求导同。

特别对 $f(x) = x$，$A = f'(x) = 1$，$dy = dx = \Delta x$。

5. 一阶微分形式的不变性

若有可微一元函数 $z = f(y)$，则不论 $y$ 是自变量还是中间变量，都满足 $df(y) = f'(y)dy$。

由定义可直接得自变量时满足。

只需验证中间变量 $y = g(x)$。

$df(g(x)) = [f(g(x))]'dx = f'(g(x))g'(x)dx$

$= f'(g(x))dg(x) = f'(y)dy$

例：$y - x - q\sin y = 0$，求 $y(x)$ 的导数。$(q\in(0,1))$

S1. 两边对 $x, y$ 求导，$y' - 1 - q\cos y\, y' = 0$，

$y'(1 - q\cos y) = 1$，$y' = \frac{1}{1-q\cos y}$

S2. 两边对 $x, y$ 求微分，$dy - dx - q\cos y\, dy = 0$。

$dy = \frac{dx}{1-q\cos y}$，$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-q\cos y}$

例：求 $d(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))$

S2. $d\ln|u| = \frac{1}{u}du$，对 $u$ 是自变量/中间变量成立。

$d\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \frac{d(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$= \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

S1. $df(x) = f'(x)dx$，可导 $\Leftrightarrow$ 可微。

$d(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})) = (\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))'dx$

$= \frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

例. 设 $y = \sin(2x + e^{x-\sin x})$，求 $dy$。

$d\sin t = \cos t\, dt = \cos(2x+e^{x-\sin x})d(2x+e^{x-\sin x})$

$= \cos(2x+e^{x-\sin x})[2+e^{x-\sin x}(1-\cos x)]$

## 二、函数极值

定义：若 $x_0$ 存在一个邻域，对其中 $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 都有 $f(x) \le f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为极大值，$x_0$ 为极大值点。

同理可定义极小值。

## 二、微分中值定理

1. Fermat 定理：设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，若 $x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0) = 0$

推论：若 $f'(x_0) = 0$ ……

2. Rolle 定理：设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)$ 在 $(a,b)$ 可导，若 $f(a) = f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$

3. Lagrange 定理（微分中值定理）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow$ 对 $\forall x_1, x_2\in(a,b)$，$\exists\theta\in(0,1)$，

使 $f'(\theta(x_2-x_1)+x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，

即 $f'(\theta\Delta x + x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$，

$\Rightarrow$ 对 $\forall x\in[a,b]$，只要 $x+\Delta x\in[a,b]$，

必 $\exists\theta\in(0,1)$ 使 $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$。

推论 ① 若 $f'(x) = 0$，则 $f(x) = c$。

证明：对 $\forall x_1, x_2$，$f(x_2) - f(x_1) = f'(\theta(x_2-x_1)+x_1)(x_2-x_1) = 0$。

② 若 $|f'(x)| \le M$（Lipschice 条件），则有 $|f(x_2) - f(x_1)| \le M|x_2 - x_1|$ 对 $\forall x_1, x_2$ 成立。

例 ①. $f(-\infty, +\infty)$ 可导，$f'(x) = f(x)$，求 $f(x)$。

[经验判断：$f(x) = e^x \to f(x) = ce^x$]

设 $g(x) = e^{-x}f(x)$，$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = 0$

$\therefore g(x) = c$，$f(x) = ce^x$。

例 ②. 求证：$f(x) = x^3 - 3x + c$ 在 $[0,1]$ 上，对 $\forall c$ 均无两个不同的实根。

证明：$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

在 $[0,1]$ 上，$f'(x) < 0$，$f(x)\downarrow$ $\therefore$ 最多只一根。

假设有两个不同实根：$f(x_1) = f(x_2) = 0$

则 $\exists\xi\in(x_1, x_2)$，使 $f'(\xi) = 0$。

又 $f'(x) = 3(x^2-1)$，$f'(\xi) = 0$，$\xi^2 = 1$。

$\therefore \xi\notin(0,1)$，$\therefore$ 不存在，矛盾。

例 ③. $0 < a < b$，求证 $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$

证明 [原命题 $\Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$]

对 $f(x) = \ln x$，对 $\forall x\in(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$，

使 $f'(\xi) = \frac{1}{\xi} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$

又 $a < \xi < b$，$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$，$\therefore$ 得证。

4. Cauchy 中值定理

$f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$(a,b)$ 上可导，$g'(x) \ne 0$，

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

理解为 ① $g(x) = x$ 时，特殊化为 Lagrange。

② 令 $u = f(x)$，$v = g(x)$，$\vec{r} = (f(x), g(x))$

则 $\exists$ 切线斜率 $= \vec{r}(a)$、$\vec{r}(b)$ 连线斜率

证明：构造 $F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) + f(a)\right]$ 过 a.b 的直线。

则 $F(a) = 0$，$F(b) = 0$。

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$。

$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0$，$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

$g'(\xi) \ne 0$，则 $g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$（连续），$\therefore g(x)$ 单调。

$\therefore g(x)$ 在 $(a,b)$ 上存在反函数

$x = g^{-1}(y)$，$\frac{dx}{dy} = (g^{-1}(y))' = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$

$\because f(x) = f(g^{-1}(y))$ 可导，$\therefore \exists\eta\in(y_1, y_2)$

使 $f(g^{-1}(\eta)) = \frac{f(g^{-1}(y_1)) - f(g^{-1}(y_2))}{y_1 - y_2} = f'(g^{-1}(\eta))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(\eta))}$

令 $\xi = g^{-1}(\eta)\in(a,b)$，$g^{-1}(y_1) = a$，$g^{-1}(y_2) = b$，

$\therefore$ 有 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 可导，则必存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$

令 $g(x) = \ln x$，$g'(x) = \frac{1}{x}$，在 $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 可导，

则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例. 常数 $\alpha > 0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，

试证 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi) = \alpha\xi^{\alpha-1}[f(1) - f(0)]$

$f'(\xi) = \alpha\xi^{\alpha-1}[f(1) - f(0)]$

$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{\alpha\xi^{\alpha-1}} = \frac{f(1)-f(0)}{1^\alpha - 0^\alpha}$

令 $g(x) = x^\alpha$，$g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$，在 $(0,1)$ 连续可导。

$\therefore \exists\xi\in(0,1)$ 使 $\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，

即 $\frac{f'(\xi)}{\alpha\xi^{\alpha-1}} = \frac{f(1)-f(0)}{1}$。

## 三、导函数的介值性

1. $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域上连续且可导。若 $\lim_{x\to x_0^\pm}f'(x)$（$x_0$ 处导函数左右极限）（记为）$= f'(x_0\pm 0)$ 存在且有限，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左右导数 $f'_\pm(x_0) = \lim_{x\to x_0^\pm}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，且 $f'_\pm(x_0) = f'(x_0\pm 0)$。

证明：$\exists\delta > 0$，对 $\forall x\in[x_0, x_0+\delta)$，$\exists\xi\in(x_0, x)$，

使得 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$。（导函数右极限）

则当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0^+$。

$\therefore \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\xi\to x_0^+}f'(\xi) = f'(x_0+0)$（右导数）。$\therefore f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$。

推论：假如 $f(x)$ 可导，则导函数 $f'(x)$ 要么连续，要么有第二类间断点。

例. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0 \end{cases}$ $\to$ 连续

$f''(x) = \begin{cases} 2\sin\frac{1}{x} - (\frac{2}{x}+1)\cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}(2\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}) \end{cases}$，不存在。第二类

2. Darboux 定理

$f(x)$ $[a,b]$ 可导，则对 $f'(a)$、$f'(b)$ 之间的 $\forall\lambda$，都存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f'(\xi) = \lambda$。

证明：不妨设 $f'(a) < f'(b)$

1) 假设 $f'(a) < 0 < f'(b)$ → $F(x) = f(x) - \lambda x$（零值介值 → 一般介值）

则有 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < 0$ 保序性。

即 $\exists\delta$，对 $x\in(a, a+\delta)$，$f(x) - f(a) < 0$。

同理，$\exists\delta$，对 $x\in(b-\delta, b)$，$f(x) - f(b) < 0$。

$\therefore f(x)$ 在 $(a,b)$ 上存在最小值点 $x_0$，$f'(x_0) = 0$。

$\Rightarrow$ 记 $g(x) = f'(x) - \lambda$，$\lambda\in[f'(a), f'(b)]$

$g(a) \le 0$，$g(b) \ge 0$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $g(\xi) = 0$。

即 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f'(\xi) = \lambda$。

2) 一般地，对于 $f'(a) < \lambda < f'(b)$，

……

1. 若 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 中连续，$(x_0, x_0+\delta)$ 可导，若导函数在 $x_0$ 处的右极限 $\lim_{x\to x_0^+}f'(x) = l$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处右可导（右导数存在），并有 $f'_+(x_0) = f'(x_0+0) = \lim_{x\to x_0^+}f'(x)$。右导数 = 导数右极限。

证明：[$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 证明存在]

连续可导，则 $\exists\xi\in(x, x_0)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi_x) = l$.（可以这样写，$x\to x_0^+$，$\xi_x\to x_0^+$。）

$f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$。

$f'(x)$ 在 $x_0$ 处连续，无第一类间断点。

2. 导函数介值性（Darboux）。{ 实数完备性 → 函数介值；微分中值 → 导数介值 }

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$\lambda$ 满足 $f'_+(a) > \lambda > f'_-(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi) = \lambda$。开闭统一，都可使用。

证明：令 $F(x) = f(x) - \lambda x$（一般介值 → 零介值），$F(x)$ 在 $[a,b]$ 可导。

$F'(x) = f'(x) - \lambda$，$F'_+(a) = f'_+(a) - \lambda > 0$，$F'_-(b) = f'_-(b) - \lambda < 0$

$F'_+(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} > 0$，（局部保序性）

$\exists\delta$，当 $x\in(a, a+\delta)$ 时，$F(x) > F(a)$。

$F'_-(b) = \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b} < 0$（同理）

$\exists\delta$，当 $x\in(b-\delta, b)$ 时，$F(x) > F(b)$。

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\therefore \exists$ 最大值，

又 $\because F(x) > F(a)$，$F(x) > F(b)$，在 $(a,b)$ 取最值

记 $x_0$ 为 $F(x)$ 在 $(a,b)$ 上的一个最大值点，

且 $F'(x_0) = 0$，$f'(x_0) = \lambda$。

## 三、未定式的极限（L'hospital）

1. 对 $\frac{0}{0}$ 型未定式。

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x_0$ 的邻域（去心邻域）连续且可导，且有 $\lim_{x\to x_0}f(x) = \lim_{x\to x_0}g(x) = 0$。如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$，则有 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$。

证明：假设 $l$ 为有限数

不妨设 $f(x_0) = g(x_0) = 0$。极限为 0，函数值可为 0 可不为 0。不妨设为 0，以便满足 Cauchy 条件。

则有 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$，且 $\exists\xi\in(x, x_0)$，$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$

当 $x\to x_0$，$\xi\to x_0$，$\therefore \lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = l$。

$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$。

推论：$\lim_{x\to x_0}f^{(k)}(x) = \lim_{x\to x_0}g^{(k)}(x) = 0$，$k = 0, 1, 2, \dots n-1$。

且 $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = l$，则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$。

2. 对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。$(\frac{*}{\infty})$

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内连续可导，且 $\lim_{x\to x_0}g(x) = \infty$（仅分母）。

如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$，则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$。

证明：$\exists\xi\in(c, x)$，$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - \left(\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\right)\frac{g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{f(x)}$

当 $c$ 足够小，$x\to x_0$，$\xi\to x_0$，

$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$。

例. 设 $\alpha > 0$，求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$，$\lim_{x\to 0}x^\alpha\ln x$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$。

$\lim_{x\to 0}x^\alpha\ln x = \lim_{y\to\infty}(\frac{1}{y})^\alpha\ln(\frac{1}{y}) = \lim_{y\to\infty}-\frac{\ln y}{y^\alpha} = 0$。

例. (1) $a > 1$，$b\in\mathbb{R}$ 时 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x} = 0$

(2) $\alpha > 0$，$\beta\in\mathbb{R}$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

证明：(1) $b < 0$，$\lim_{x\to+\infty}x^b = 0$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x} = 0$

$b = 0$，$x^b = 1$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x} = 0$。

$b > 0$，此时令 $n = [b] + 1$，

则有 $0 < \frac{x^b}{a^x} \le \frac{x^n}{a^x}$（$x > 0$）。

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x\ln^2 a}$

$= \dots = \lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{(\ln a)^n a^x} = 0$。

又 $0 < \frac{x^b}{a^x} \le \frac{x^n}{a^x}$，根据夹逼，得证。

(2) $y = \ln x$，$x = e^y$，$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{y^\beta}{e^{y\alpha}} = \frac{y^\beta}{a^y}$。

由 (1) 得 $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$。

※ $(\ln x)^\beta \ll x^\alpha \ll a^x \le x^x$。

3. 其他类型的未定式

① $0\cdot\infty$，$\infty - \infty$ → 化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

例：求 $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x})$

$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x}) = \lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$。

② $1^\infty$、$0^0$、$\infty^0$ 等 → 取指/对，化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$。

例 1. 求 $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

$(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ 取对数 $\Rightarrow \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$ $(\frac{0}{0})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x}\dots$

例 2. 求 $\lim_{x\to 0^+}x^x$。

指对恒等变形得 $x^x = e^{x\ln x}$。

$\therefore \lim_{x\to 0^+}x^x = \lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}x\ln x} = e^0 = 1$。

③ 无穷小替换

$f(x)\sim u(x)$，$g(x)\sim v(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$。

即 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{u(x)}\frac{v(x)}{g(x)}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$。

$x\to 0$：$\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x - 1\sim x$

$1 - \cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha - 1\sim\alpha x$。

$\tan x - \sin x\sim\frac{x^3}{2}$，$x - \sin x\sim\frac{x^3}{6}$，$\tan x - x\sim\frac{x^3}{3}$

例 1. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

$x\to 0$，$\sin x\sim x$（化简度）。指对。

$(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e^{\frac{1}{2x}\ln(2x+1)}$

$= e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}(e^{\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{2x}\ln(2x+1)} - 1)$　$e^{u(x)} - 1\sim u(x)$ $(u(x)\to 0)$

$\sim e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}\cdot[\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{2x}\ln(2x+1)]$　$\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\to e$。

$\sim(\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{2x}\ln(2x+1))(1+2x)^{\frac{1}{2x}}$

$\therefore$ 原式 $= \lim\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{2x}\ln(2x+1)]}{x}$ ……

## 微分中值定理

（Fermat 定理、Rolle 定理、Lagrange 定理、Cauchy 微分中值定理 及例题）……

## 未定式的极限（L'Hospital）

（$\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型、其他类型的未定式 及例题）……