导数与函数

2021年8月23日 星期一　上午11:22

一、单调性与极值

1. 基本概念
   - 驻点：$f'(x_0)=0$.
   - 极值点：$f'(x_0)=0$ 且两边增减不同.
   - 最值点：极值中的最值；在端点处.

2. 定理

① 设 $f(x)$ I 连续，在 I 内部可导，则 $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单增，$f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单减.

若 $\exists x$ 使 $f'(x)\geq 0\ (x<x_0)$，$f'(x)\leq 0\ (x>x_0)$，则 x_0 为极大值点.

证明：($\Rightarrow$) 不妨设 $f'(x)\geq 0$，则对 $\forall x_1<x_2\in I$，都 $\exists \xi\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$

$\therefore f(x_2)\geq f(x_1)$，单增.

($\Leftarrow$) 不妨设 $f(x)$ 单增，则对 $\forall x_0\in I$，$\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_{\pm}(x_0)\geq 0$.

② 设 $f(x)$ I 连续，在 I 内部可导，对 $x_0\in I$，若 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导，则有：

若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为极大值点. 不取等号

若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为极小值点. 严格极值

证明：不妨设 $f''(x_0)<0$，则对 $\forall x\in I$，

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)<0$，

$x>x_0$，$f'(x)<f'(x_0)=0$，$f(x)$ 单减

$x<x_0$，$f'(x)>f'(x_0)=0$，$f(x)$ 单增.

$\therefore x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

3. 例① 试证：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，总有 (1) $x<\tan x$　(2) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

证明：(1) 令 $f(x)=\tan x-x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$.

也补充定义 $f(0)=0$，$f'(x)=\sec^2x-1=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单增.

$f(x)>f(0)=0$，$\tan x>x$.

(2) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x \Leftrightarrow \frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(0)=1$

$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$.

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单减

$\therefore f(\frac{\pi}{2})<f(x)<f(0)$，$\frac{2}{\pi}<f(x)<1$.

例② 设 $x>0$，$0<\alpha<1$，证明 $x^\alpha-\alpha x\leq 1-\alpha$.

设 $f(x)=x^\alpha-\alpha x$，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$

则 $f(x)$ 有唯一驻点 $x=1$.

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0$，$f''(1)=\alpha(\alpha-1)<0$.

$\therefore x=1$ 为 $x>0$ 上的极大值点.

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减，

$\therefore x=1$ 为 $x>0$ 上的最大值点，$f(x)\leq f(1)=1-\alpha$.

例③ 设 $a>0$，$b>0$，$a+b=2$，求 $\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}$ 的最小值.

令 $f(a)=\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a^2+1}{a(2-a)}$，

$f'(a)=\frac{2a^2(2-a)-(a^2+1)(2-2a)}{a^2(2-a)^2}=\frac{2a^2+2a-2}{a^2(2-a)^2}$

令 $f'(a)=0$，得 $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍）.

则有 $0<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$f'(a)<0$，$f(a)$ 单减.

$a>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$f'(a)>0$，$f(a)$ 单增.

$\therefore f(a)$ 在 $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

推1. 有界闭区间上连续函数的最值点 $\in$ {端点，极值点} 内驻点和不可导内点.

例. 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在 $[-2,2]$ 上最大值和最小值 M, m. 书写又总结.

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

得 $f(x)$ 的驻点 $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=0$.

端点 $f(-2)=13$，$f(2)=13$.

驻点 $f(0)=5$，$f(\pm1)=4$

$\therefore$ 在 $x=\pm1$ 处取最小值 $m=4$，在 $x=\pm2$ 处取最大值 $M=13$.

例. $f(x)$ 在 $[0,a)$ 可导，$x>0$ 二阶可导，$f(0)=1$，$f'(0)\neq 0$，且 $0<f(x)<x$，$x\in(0,a)$.

令 $x_{n+1}=f(x_n)$，$x_1\in(0,a)$.

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限.

(2) 求证 $\{nx_n\}$ 收敛，并求极限.

① x_n 单减且 $x_n>0$. 收敛.

$0<f(x_n)=x_{n+1}<x_n$.

设 $\lim x_n=A$，则 $A\geq 0$.

$x_{n+1}=f(x_n)$，同时取极限，$A=f(A)$.

又 $f(x)<x$，$\therefore A=0$，$f(0)=0$

② $f(x)\sim x\ (x\to 0^+)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$. $f(x)\sim x$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}$ 可用 stolz.

$=\lim\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}\sim\lim\frac{x^2}{x-f(x)}=\lim\frac{2x}{1-f'(x)}$

$\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\right)=\lim\frac{-2}{f''(x)}$

利用洛必达与极限.

推2. $f(x)$ 在 I 中连续，在 I 内部有且仅有一个极值点 x_0，则 x_0 为 I 上的最值点.

$f(x)$ 在 I 中连续，在 I 内部无极值点 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 I 中单调 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 I 上是单值的.

（单值：$x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$）.

证明：无极值点 $\Rightarrow$ 无 $f'(x_0)=0$ / 有 $f'(x_0)=0$

无 $f'(x)=0$，对 $x\in I$，$f'(x)\neq 0$.

不妨设 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 单增.

有 $f'(x_0)=0$，无极值点，则对 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$f'(x)$ 同号.

不妨设 $f'(x)\geq 0$，则 $f(x)$ 单增.

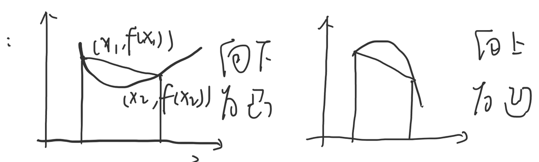
取 $x_1\in I$，对 $\forall x_2\in I$ 且 $x_2>x_1$，

不妨设 $x_2>x_1$，则有 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\lim\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x)\geq f'(x_1)$.

二、凹凸性与拐点

几何上：



下凸的几何意义：弦右移，斜率单增. 弦位于弦下方，切线上方.

代数上：函数 $f(x)$，直线 $g(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

① 对 $x_1<x<x_2$，有 $f(x)\leq g(x)$，为凸函数.

② 记 $\alpha=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，$x=\alpha(x_2-x_1)+x_1=(1-\alpha)x_1+\alpha x_2$

$g(x)=f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))=(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2)$.

1. 下凸的定义：对 $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，$\lambda_1,\lambda_2>0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，都有 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1<x<x_2\in I$，都有 $f(x)\leq f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

2. 定理：① 设 $f(x)$ 是 I 上的凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1<x<x_2\in I$，有 $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ 斜率单增.

证明：($\Rightarrow$) 记 $\lambda_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$，$\lambda_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，$\lambda_1+\lambda_2=1$.

则有 $f(x)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$.

$f(x)=\lambda_1f(x)+\lambda_2f(x)$

$\therefore\lambda_1(f(x)-f(x_1))\leq\lambda_2(f(x_2)-f(x))$

$\therefore\frac{f(x)-f(x_1)}{\lambda_2}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda_1}$，$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

根据 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+d}\leq\frac{c}{d}$

可得 $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

($\Leftarrow$) 同理可证.

② $f(x)$ $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，为凸函数

$\Leftrightarrow$ 1) $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增.

2) 若有二阶导，则 $f''(x)\geq 0$ 且不恒为 0.

1) 证明：($\Rightarrow$) 凸函数，对 $\forall x_1<x<x_2\in[a,b]$，

$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

$\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(x_1)$，

$\lim\limits_{x\to x_2^-}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(x_2)$，

$\therefore f'(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)$，$f'(x)$ 单增.

($\Leftarrow$) 设 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增，对 $x\in(x_1,x_2)$，

存在 $\xi\in(x_1,x)$，$\eta\in(x,x_2)$，

有 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$，$f'(\eta)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

$\xi<\eta$，则 $f'(\xi)<f'(\eta)$

$\therefore\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$，为凸函数.

3) 对 $\forall x_1<x_2\in I$ 有 $f'(x_2)\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f'(x_1)$.

4) 对 $\forall x_0\in I$，总有 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

3) 证明：($\Rightarrow$) 连续可导，对 $\forall x_1,x_2\in I$，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$\therefore f'(x_1)<f'(\xi)<f'(x_2)$.

如等性质同理.

4) 证明：($\Rightarrow$) $f(x)$ 下凸，对 $\forall x_1<x_2\in I$，

有 $f(x)\leq f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

$\lim\limits_{x_2\to x_1}\left[f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\right]$

$=f(x_1)+f'(x_1)\lim(x-x_1)$

$=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$

③ 琴生：凸，$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$.

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geq 0$，且 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$.

例. 设 $a,b,c>0$，求证：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

证明：记 $k=a+b+c$，$f(x)=\frac{x}{k-x}$

$f'(x)=\frac{k-x+x}{(k-x)^2}=\frac{k}{(k-x)^2}>0$，$f''(x)=\frac{2k(k-x)}{(k-x)^4}>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,k)$ 上为凸函数，

$\therefore f(\frac{a+b+c}{3})=f(\frac{k}{3})\leq\frac{1}{3}[f(a)+f(b)+f(c)]$，

$f(\frac{k}{3})=\frac{1}{2}$，$\therefore f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{2}$.

例. 设 $0<x<y$，试证：$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$.

$(\lambda_1x+\lambda_2y)\ln(\lambda_1x+\lambda_2y)<\lambda_1x\ln x+\lambda_2y\ln y$.

证明：1) 令 $\frac{x+y}{2}=x_0$，$0<x<x_0<y$.

$\Leftrightarrow 2x_0\ln x_0<x\ln x+y\ln y$，

$\Leftrightarrow x\ln x-x_0\ln x_0>x_0\ln x_0-y\ln y$，

$\Leftrightarrow (x-x_0)f'(\xi)>(x_0-y)f'(\eta)$，$\xi\in(x,x_0)$，$\eta\in(x_0,y)$.

$\Leftrightarrow 1+\ln\xi>1+\ln\eta$.

又 $\because x<\xi<x_0<\eta<y$，$\therefore\ln\xi<\ln\eta$.

2) $f(x)=x\ln x$，$f''(x)=\frac{1}{x}>0$，为下凸，

则有 $f(\lambda_1x+\lambda_2y)<\lambda_1f(x)+\lambda_2f(y)$.

三、拐点

1. 定义：$f(x)$ 连续，若 $f(x)$ 在 $x<x_0$ 与 $x>x_0$ 处凹凸性改变，则 $x=x_0$ 为拐点.

2. 定理：① 若 $f(x)$ 可导，则 $f'(x)$ 在 x_0 左侧单增（减），右侧单减（增）.

② 若 $f(x)$ 在拐点处二阶可导，则 $f''(x_0)=0$.（不一定二阶可导）

证明：不妨设 $x<x_0$，$f(x)$ 凸，$x>x_0$，$f(x)$ 凹.

则有 $x<x_0$，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单增

$x>x_0$，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单减.

$\therefore$ 可知 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 取到极值.

$\therefore[f'(x_0)]'=f''(x_0)=0$

例. 求 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的凸凹区间与拐点.

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

$0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f''(x)<0$，$(0,e^{\frac{3}{2}})$ 为凹区间.

$x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f''(x)>0$，$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 为凸区间.

易见 $(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})=(x_0,f(x_0))$ 为显式曲线 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的拐点.

例. 求平面参数式曲线 L: $(x,y)=(e^t,\sin t)$ 的拐点.

$\left[\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''x'-y'x''}{(x')^3},\ \frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}\right]$.

$D(t)=\begin{vmatrix}x'&y'\\x''&y''\end{vmatrix}=x'y''-x''y'=e^t(-\sin t-\cos t)=0$.

得 $-\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})=0$，$t=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbb{Z}$.

易见 L 的拐点为 $t_k=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbb{Z}$.

C^2 平面参数式曲线，使 $\begin{vmatrix}x'&y'\\x''&y''\end{vmatrix}$ 值为 0 且两侧正负不同的点为拐点.

四、曲率

1. 定义：收敛的极限值 $\lim\limits_{B\to A}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 被称为空间曲线的曲率，记为 $K(A)$.

表示每单位空间曲线长度切线射线的偏转角. 记 $\rho(A)=\frac{1}{K(A)}$ 曲率半径.

（$\Delta s=\pi R$，$\Delta\varphi=\pi$，$K(A)=\frac{1}{R}$，$\rho(A)=R$）.

2. 计算：C^2 空间的参数式曲线 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

则 L 在 t 处曲率 $k(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{(\vec{r}'(t))^3}$.

$\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$ 曲率半径.

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$

轴上单位向量

a.b 轴上分量

性质：① $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

② $\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}=0$.

③ $\vec{a}\times(c_1\vec{b}_1+c_2\vec{b}_2)=c_1\vec{a}\vec{b}_1+c_2\vec{a}\vec{b}_2$

证明：$\vec{r}(t+\Delta t)$，$\vec{r}(t)$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\sim\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\vec{r}'(t)\Delta t}$.

$\sin\Delta\varphi=\frac{|\vec{r}'(t+\Delta t)\times\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)||\vec{r}'(t+\Delta t)|}$

$\therefore\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\vec{r}'(t+\Delta t)\times\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)||\vec{r}'(t+\Delta t)|\times\vec{r}'(t)\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\vec{r}'(t)\times(\vec{r}'(t+\Delta t)-\vec{r}'(t))|}{|\vec{r}'(t)||\vec{r}'(t+\Delta t)|\cdot\vec{r}'(t)\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\vec{r}'(t)\times\frac{\vec{r}'(t+\Delta t)-\vec{r}'(t)}{\Delta t}\right|}{|\vec{r}'(t)|^2|\vec{r}'(t+\Delta t)|}=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$.

3. 退化到平面：$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),0)$.

$\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t),0)$.

$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x'&y'&0\\x''&y''&0\end{vmatrix}=(0,0,x'y''-x''y')$

$k(t)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{(\vec{r}'(t))^3}=\frac{x'y''-x''y'}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}$.

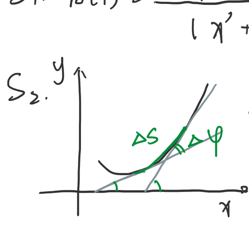
* 对 $k(t)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|^3}$，正负表示顺逆.

$\vec{r}''(t)$，$\vec{r}'(t)$ 逆，正.　$\vec{r}'(t)$，$\vec{r}''(t)$ 顺，负.

对于平面显式曲线 $\begin{cases}x=t\\y=f(t)\end{cases}$.

S_1. $k(t)=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ 正负表方向. 上下凸.

S_2.



$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta s=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{(\Delta x)^2+[f(x+\Delta x)-f(x)]^2}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)^2}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sqrt{1+f'(x)^2}$.

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\alpha-\beta)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x))$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\arc(\tan f'(x+\Delta x)-\tan f'(x))$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\frac{d\varphi}{dy}\times\frac{dy}{dx}\times\varphi$.

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\arc(\tan f'(x+\Delta x)-\tan f'(x))}{\Delta x}\times\frac{1}{1+f'(x)^2}$

$\sim\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\times\frac{1}{1+f'(x)^2}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{dx}\times\frac{dx}{ds}=\frac{f''(x)}{(\sqrt{1+f'(x)^2})^3}$.

单调性与极值.

1. 单调性.

2. 极值判别：$f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$ 存在，则有 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点；$f''(x_0)<0$ 时，x_0 是 $f(x)$ 的严格极大值点；$f''(x_0)=0$，未定.

$f''(x_0)=f''_+(x_0)=f''_-(x_0)>0$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0$，$f'(x)>f'(x_0)=0$，↗

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0$，$f'(x)<f'(x_0)=0$，↘

例. 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在 $[0,2]$ 上的极值.

驻点方程 $\begin{cases}f'(x)=4x^3-4x=0\\0<x<2\end{cases}\Rightarrow x_0=1$.

$f''(x_0)=f''(1)=8>0$. 严格极小值.

端点处 $f(0)=5$，$f(2)=13$，驻点 $f(1)=4$.

3. $f(x)$ 在 I 中连续，在 I 内部有且仅有一个极值点 x_0，则 x_0 为 I 上的最值点.

$f(x)$ 在 I 中连续，在 I 内部无极值点 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 I 中单调 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 I 是单值的.

（单值：$x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$）.

平面显式曲线的凸凹性.

2. $f(x)$ 在 I 连续，在 I 内可导，则有 $f(x)$ 在 I 中下凸 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 在 I 内单增.

证明：($\Leftarrow$) 对 $\forall x_1<x<x_2\in I$，

$\exists\xi_1\in(x_1,x)$ 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=k_{xx_1}$

$\exists\xi_2\in(x,x_2)$ 使 $f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=k_{xx_2}$

$\because f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，$\therefore k_{xx_1}\leq k_{xx_2}$.

($\Rightarrow$) 对 $\forall x_1<x<x_2\in I$，

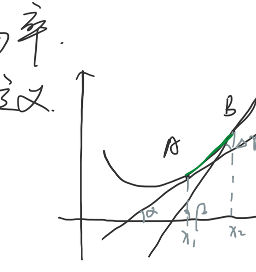
凸 $\Rightarrow k_{xx_1}\leq k_{x_1x_2}\leq k_{xx_2}$.

$\lim\limits_{x\to x_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\lim\limits_{x\to x_2}k_{xx_2}\leq f'(x_2)$

$\lim\limits_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim\limits_{x\to x_1}k_{xx_1}\geq f'(x_1)$.

四、曲率.

1. 定义



$\overset{\frown}{AB}=\Delta s$，$\beta-\alpha=\Delta\gamma$.

曲率（变化率）$K(A)$ 为 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\gamma}$.

近似判断.

对 Δs：$\sqrt{\Delta x^2+[f(x+\Delta x)-f(x)]^2}=\Delta x\sqrt{1+\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]^2}$

对 $\Delta\gamma$：$\tan\alpha=f'(x)$，$\alpha=\arctan f'(x)$

$\tan\beta=\tan(\alpha+\Delta\gamma)=f'(x+\Delta x)$.

$\therefore\Delta\gamma=\arc(\tan f'(x+\Delta x)-\tan f'(x))$

$\frac{\Delta\gamma}{\Delta x}=\frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\alpha=\frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}$.

$\therefore K(A)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\gamma}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\frac{\Delta\gamma}{\Delta x}}=\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$.