# 导数

2021年8月17日 星期二　　下午3:18

一、定义

1. 基本定义：设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域中有定义，如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在且有限，则记极限为 $f'(x_0)$. $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x_0}$

即 $f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2. 单侧导数：设 $f(x)$ 在 $x_0$ 右侧邻近有定义 $[x_0,x_0+a)$，如果 $\Delta x>0$，且 $\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称其为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的右导数 $f'_+(x_0)$。同理可定义左导数。

3. 区间导数：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $f(x)$ 在 I 上的每一点都可导，且若 I 是闭区间，左端点右可导，右端点左可导，则称 $f(x)$ 在区间 I 上可导。

二、定理：$f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续。

证明：[连续：$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$]

$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$.

三、基本计算

1. 四则运算（高中基础）

$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

证明：$(f(x)g(x))'=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)[g(x)-g(x_0)]+g(x_0)[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}$

$=f(x)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$. 或 $AB-ab=A(B-b)+b(A-a)$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

先证 $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$.

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}}{\Delta x}=\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}=-\frac{g'}{g^2}$

再 $\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'$.

2. 复合函数求导：链式法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x_0$ 可导，函数 $f$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则有复合函数 $f\circ\varphi$ 在 $x_0$ 可导，且 $(f\circ\varphi)'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

证明：设 $z=f(y)$，$y=g(x)$，求 $(f(g(x)))'$

$(f(g(x)))'=\frac{df(g(x))}{dx}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ → $g(x)\neq g(x_0)$ 可能不成立

$=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

而在 $g(x)-g(x_0)=0$ 的情况，

则 $h(y)=\begin{cases}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\\ f'(y_0), & y=y_0\end{cases}$，$h(y)$ 在 $y_0$ 连续

$\therefore \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=h(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

$g(x)\neq g(x_0)$ 时，成立，

$g(x)=g(x_0)$ 时，也有 $\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

3. 反函数求导

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续且严格单调（则有反函数），如果在 $x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且 $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

证明：$(f^{-1}(y))'=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}$

$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{y-y_0}=\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^{-1}=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1}$

$\frac{dx}{dy}=(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

4. 初等函数在定义域上都可导。

① $y=c$，$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$.

② $y=x^n$，$y'=nx^{n-1}$.

$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots$

$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x}=nx^{n-1}$

$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=\lim\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x}$

$=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

③ $y=\sin x$，$y'=\cos x$. $y=\cos x$，$y'=-\sin x$.

$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}\cdot 2}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$.

④ $y=\tan x$，$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

⑤ $y=\log_a x$，$y'=\frac{1}{x\ln a}$.

$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$

$\left(\Delta x\to 0,\ \frac{x}{\Delta x}\to+\infty\right)$ $=\lim\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$

特别地 $a=e$，$y'=\frac{1}{x}$

⑥ $y=a^x$，$y'=a^x\ln a$.

$x=\log_a y$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=a^x\ln a$

特别地 $a=e$，$y'=e^x$

⑦ $y=\arcsin x$，$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arccos x$，$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arctan x$，$y'=\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\tan y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

5. 例① 设 $f(x)$ 在 $x$ 处可导，$f(x)\neq 0$，求 $\ln|f(x)|$ 的导数。

记 $z=\ln y$，$y=|f(x)|$，$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{y}$.

$\therefore \ln|f(x)|'=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{|f(x)|}(|f(x)|)'$.

∵ $f(x)$ 在 $x$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x$ 附近连续。

$f(x)>0$，$f|_{(x-\delta,x+\delta)}>0$，$|f(x)|=f(x)$，$\frac{d|f|}{dx}=f'(x)$.

$f(x)<0$，$f|_{(x-\delta,x+\delta)}<0$，$|f(x)|=-f(x)$，$\frac{d|f|}{dx}=-f'(x)$.

∴ 可得 $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$. 故 $f'(x)=f(x)(\ln f(x))'$ 可用于求导。

例② $y=u(x)^{v(x)}$，求导数 $y'(x)$.

$y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$

$y'=e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$

$=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$.

例③ 求 $y=xe^x$ 反函数 $x=f(y)$ 的导数。

$y=xe^x=f(y)e^{f(y)}$，两边对 $y$ 求导，

则有 $1=f'(y)e^{f(y)}+f(y)f'(y)e^{f(y)}=f'(y)e^x+f'(y)xe^x$

$\therefore f'(y)=\frac{1}{e^x(x+1)}$，其中 $x$ 满足 $y=xe^x$.

例④ 求 $y=(x^2+2)e^x$ 反函数的导数。

$S_1$. $y=(f(y)^2+2)e^{f(y)}$，两边对 $y$ 求导，$x=x(y)$.

$1=2f(y)f'(y)e^{f(y)}+(f(y)^2+2)e^{f(y)}f'(y)$

$=2xf'(y)e^x+(x^2+2)e^xf'(y)$.

$\therefore f'(y)=\frac{1}{e^x(x^2+2x+2)}$，其中 $y=(x^2+2)e^x$.

$S_2$.（反函数的导数）

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{e^x(x^2+2x+2)}$，$x$ 满足 $y=(x^2+2)e^x$

例⑤ $y=y(x)$ 由方程 $2y+\sin(x^2+2y)=0$ 确定，求 $y'(x)$.

两边对 $x$ 求导：$2y'+\cos(x^2+2y)(2x+2y')=0$

$y'=\frac{-2x\cos(x^2+2y)}{2\cos(x^2+2y)+2}$

把式子看作 $y=y(x)$，对 $x$ 求导即成 $y'$.

四、高阶导数

1. 定义：$y=f(x)$ 在区间 I 可导，导数为 $f'(x)$.

若 $y=f'(x)$ 在 $x_0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 有二阶导，

记为 $f''(x_0)=y''(x_0)=\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$.

以此类推得 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的 n 阶导数，

记为 $f^{(n)}(x_0)=\frac{d^ny}{dx^n}$，是 $f^{(n-1)}(x)$ 的导函数。

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$，$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$.

2. Leibniz 定理：$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

证明：$n=1$，$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

$n=2$，$(f(x)g(x))^{(2)}=(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))'$

$=(f'(x)g(x))'+(f(x)g'(x))'$

$=f^{(2)}(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g^{(2)}(x)$

$=\sum_{k=0}^{2}C_2^k f^{(2-k)}(x)g^{(k)}(x)$

$n\geq 2$，假设 $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$

则 $(f(x)g(x))^{(n+1)}=((f(x)g(x))^{(n)})'$

$=\left(\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)\right)'$

$=\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}\left(f^{(i+1)}(x)g^{(j)}(x)+f^{(i)}(x)g^{(j+1)}(x)\right)$

$=\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}f^{(i+1)}(x)g^{(j)}(x)+\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}f^{(i)}(x)g^{(j+1)}(x)$

$\sum_{i'+j=n+1}\frac{n!}{(i'-1)!j!}f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)$　　$\sum_{i+j'=n+1}\frac{n!}{i!(j'-1)!}f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)$

$\sum_{i+j=n+1}\frac{n!}{(i-1)!j!}f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)$

$=\sum_{i+j=n+1}n!\left(\frac{1}{(i-1)!j!}+\frac{1}{i!(j-1)!}\right)f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)$

$=\sum_{i+j=n+1}n!\frac{(i+j)}{i!j!}f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)$

$=\sum_{i+j=n+1}\frac{(n+1)!}{i!j!}f^{(i)}(x)g^{(j)}(x)$. 推导成功.

∴ 可得 $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

3. 多项式

① 高阶导数：设 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

则 $P_n'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$,

$P_n^{(k)}(x)$ 是一个 $(n-k)$ 次多项式 $(k\leq n)$

$P_n^{(n)}(x)=a_nn!$，$P_n^{(n+k)}(x)=0$.

② 定义：$P_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)$. $(Q_{n-1}(x)\neq 0)$.

$x_0$ 是 $P_n(x)$ 的 r 重根 ⟺

$P_n'(x_0)=P_n^{(2)}(x_0)=\cdots=P_n^{(r-1)}(x_0)=0$，$P_n^{(r)}(x_0)\neq 0$.

4. 例① $f(x)=e^{ax}$，$f^{(n)}(x)=a^ne^{ax}$.

$f(x)=x^2e^{ax}$. $f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}$.

$f^{(2)}(x)=2e^{ax}+4axe^{ax}+a^2x^2e^{ax}\cdots$

$f(x)=\ln(x+1)$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}$，$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$.

$f(x)=(1+x)^{\alpha}$，$f'(x)=\alpha(x+1)^{\alpha-1}$.

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(x+1)^{\alpha-n}$.

$\alpha=-1$，$f^{(n)}(x)=(-1)^nn!(x+1)^{-(n+1)}$.

例② 求 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的二阶、三阶导.

1) $x\neq 0$，$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^4\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}$.

$x=0$，$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^4\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x}=0$.

2) $x\neq 0$，$f''(x)=12x^2\sin\frac{1}{x}-4x^3\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}+x^2\cdot\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

$=(12x^2+1)\sin\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}$

$x=0$，$f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x}-\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(4\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}-\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x}\right)=0$.

3) $x\neq 0$，$f'''(x)=24x\sin\frac{1}{x}-(12x^2-1)\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\left(2\cos\frac{1}{x}-2x\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)$

$=\left(24x+\frac{2}{x}\right)\sin\frac{1}{x}-\left(14+\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}$.

$x=0$，$f'''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(\Delta x)-f''(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(12x^2-1)\sin\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}}{\Delta x}$

$=\left(12\Delta x-\frac{1}{\Delta x}\right)\sin\frac{1}{\Delta x}-2\cos\frac{1}{\Delta x}$ 不存在极限.

故 $f'''(0)$ 不存在.

例③ $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\tan x)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

即 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$(1+x^2)f'(x)=1$

两边求 $(n-1)$ 阶导，$\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(1+x^2)^{(n-k)}(f'(x))^{(k)}=0$,

$f^{(n)}(x)(x^2+1)+(n-1)f^{(n-1)}(x)(2x)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}f^{(n-2)}(x)(2)=0$

$(x^2+1)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0$.

二阶（差分）方程 → 代入 $x=0$，$f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$. 递推式.

$f(0)=\arctan 0=0$，$f'(0)=\frac{1}{1+x^2}=1$.

$f^{(2n)}(0)=-(2n-1)(2n-2)f^{(2n-2)}(0)=\cdots=\cdots f(0)=0$.

$f^{(2n-1)}(0)=-(2n-2)(2n-3)f^{(2n-3)}(0)=-(2n-2)(2n-3)\cdots\times 1$.

例：求下列函数的 n 阶导.

$y=x^3$. $y'=3x^2$. $y''=6x$. $y'''=6$. $y^{(4)}=0$. $y^{(n)}=0$，$n\geq 4$.

推广：$(x^k)^{(k)}=k!$，$(x^k)^{(k+n)}=0$.

$y=e^{ax}$. $y'=ae^{ax}$，$y^{(n)}=a^ne^{ax}$.

$y=\frac{1}{x+c}$　$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+c)^{n+1}}$　算+归纳.

$y=\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)$

$=\frac{(-1)^nn!}{5}\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$

例. 常数 $a\neq 0$，试证：

(1) $[\cos(ax+c)]'=a\cos\left(ax+c+\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $[\cos(ax+c)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+c+\frac{n\pi}{2}\right)$.

证明：(1) $[\cos(ax+c)]'=-a\sin(ax+c)=a\cos\left(ax+c+\frac{\pi}{2}\right)$

(2) 对 (1) 式多次求导.

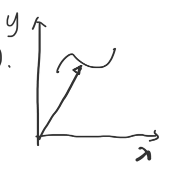
$[\sin(ax+c)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+c+\frac{n\pi}{2}\right)$ 同样.

五、参数方程表示的函数

1. 复习回顾

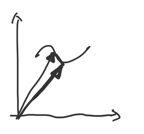
$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$. $\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t))$.

$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}\varphi(t),\lim_{t\to t_0}\psi(t)\right)$



2. 连续性

若 $\vec{a}$，使对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta>0$，当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有 $0<|\vec{r}(t)-\vec{a}|<\varepsilon$，则记 $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$. 当 $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)=\vec{a}$ 时，称 $\vec{r}(t)$ 在 $t_0$ 连续.



3. 导数

$\vec{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$　(速度概念).

$\vec{r}(t)$ 在 $t_0$ 处连续且可导 ⟺ $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $t_0$ 可导.

如果在 $t_0$ 邻域内，$x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，

则 $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2\cdot\varphi'(t)}$

$=\frac{\psi''(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))-\psi'(\varphi^{-1}(x))\varphi''(\varphi^{-1}(x))}{(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^3}$

书本例题.

2. $y=x^n$. $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$.

$(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2$

$\therefore y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots}{\Delta x}=nx^{n-1}$.

5. $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$

$x\geq 0$. $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2$.

$x<0$. $f'(x)=2x$.

$x=0$. $\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}=0$

$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}=0$

7. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

不可导：$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$

15. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$. $f'(x)=3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}$

20. $y=v(x)^{u(x)}=e^{u(x)\ln v(x)}$

$y'=e^{u(x)\ln v(x)}\cdot\left[u'(x)\ln v(x)+\frac{u(x)}{v(x)}\right]$

21. $y=xe^x$. $\ln y=\ln(xe^x)=\ln x+\ln e^x=x+\ln x$.

$x'e^x+xx'e^x=1$. $x'=\frac{e^{-x}}{1+x}$. $x$ 看作对 $y$ 的函数.

3. 复合函数链式求导.

$\frac{df(g(x))}{dx}\Big|_{x_0}=f'(g(x_0))g'(x_0)$. $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$.

证明：记 $h(y)=\begin{cases}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\\ f'(y_0), & y=y_0\end{cases}$

则有 $\lim_{y\to y_0}h(y)=h(y_0)$，$h(y)$ 在 $y_0$ 连续.

记之 $f(y)-f(y_0)=h(y)(y-y_0)$.

代入 $y=g(x)$ $(x\neq x_0)$，并两边除于 $x-x_0$，得

$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=h(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

取极限 $x\to x_0$，$\frac{df(g(x))}{dx}=h(g(x_0))\frac{dg(x)}{dx}$

$[f(g(x))]'=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

例. $f(x)=\sin(e^{2x+x^3})$.

$f'(x)=\cos(e^{2x+x^3})\cdot e^{2x+x^3}(3x^2+2)$

例. $\alpha$ 为实常数. 求 $(x^{\alpha})'$.

$(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

例 $f(x)$ 可导且 $f(x)\neq 0$，求 $(\ln|f(x)|)'$.

$f(x)$ 恒 $>0$，$\ln|f(x)|=\ln f(x)$. $\therefore y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$f(x)$ 恒 $<0$，$\ln|f(x)|=\ln(-f(x))$. $y'=\frac{-f'(x)}{-f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

即 $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$，$\ln|x|=\frac{1}{x}$.

4. 反函数求导.

$y=f(x)$ 反函数 $x=f^{-1}(y)$. $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

例. 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

反函数 $x=\sin y$. 要代出 $x$.

$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

反函数 $x=\cos y$.

$y'=\frac{1}{x'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$x=\tan y$，$y'=\frac{1}{x'}=\frac{\cos^2 y}{1}=\frac{1}{1+x^2}$.

## 高阶导数.

1. 定义与表示：$y^{n}(x)=(y^{n-1}(x))'=\frac{d}{dx}(y^{(n-1)}(x))$

$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$　$n=0\to$ 自身.

y 的 n 阶微分 ÷ 自变量微分的 n 次幂

2. 定理：Leibniz 公式. $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}$

证明方法利用了 $C_n^r+C_n^{r-1}=C_{n+1}^r$

$\binom{\alpha}{r}+\binom{\alpha}{r-1}=\binom{\alpha+1}{r}$ 推广 r 为实数，$\alpha$ 为自然数.

例. 求 $(x^2e^{3x})^{(10)}$，$(x^3\sin(2x))^{(9)}$.

$(x^2e^{3x})^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^2)^{(k)}(e^{3x})^{(10-k)}$

★ $(x^k)^{(k+n)}=0$，即 $k\geq 3$，都为 0.

$=\sum_{k=0}^{2}C_{10}^k(x^2)^{(k)}(e^{3x})^{(10-k)}$

$=x^2\cdot 3^{10}e^{3x}+10\times 2x\cdot 3^9e^{3x}+45\cdot 2\cdot 3^8e^{3x}$

$=3^9e^{3x}(3x^2+20x+30)$.

## 参数方程.

函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定，

求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.（t 连续变化，x 严格单调有反函数）

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$. 复合

递归. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$. 复合

$=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$

例. 设 $y=\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

可验证得 $(1-x^2)y''=xy'$.

$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$y''=-\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{xy'}{1-x^2}$.

式两边求 n 阶导得

左 $=(1-x^2)y^{(n+2)}+n(-2x)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}(-2)y^{(n)}$

右 $=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}$

上式中令 $x=0$，$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$，$n\in N^*$. (间隔递推式.) 需2个.

递推基础 $y(0)=0$，$y'(0)=1$.

得 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ [(2k-1)!!]^2, & n=2k+1\end{cases}$ 如 $10!!=10\times 8\times 6\times\cdots$

双阶乘表示间隔为2的连乘积.