

一. 关于求导

例. 求 y = πe^x 反函数 x = f(y) 的导数.
例. 求 y = (a^x)^e 反函数的导数
例. 求 y = y(x) 由方程 y = sin(a^y + π) 确定, 求 y'(x).

二. 微分中值定理证明

- 1. 设对任意 x, 不等式 |(f(y)-f(x))/(y-x)| <= M |y-x|^n 成立, 求证 f(x) 在 (-∞, +∞) 恒为 n 阶无穷小.
2. 若 f(x) 在 I 内可导, 则 f'(x) 在 I 上没有第一类间断点.
3. 设 f(x) 在 (a, +∞) 可微, 且 lim_{x->+∞} f'(x) = A, 证明存在 ε > 0, +∞) 使 f'(x) >= A - ε.
4. f(x) 在 [0, +∞) 连续可导, 且二阶可微, f'(0) < 0, f'(x) > 0, 求证: 对任意 x > 0, 都有 f(x) + f(x) > f(0) + f(x).

例. 设函数 f(x) 在有限闭区间 [a, b] 内可导且无界, 证明: f(x) 在 [a, b] 内也无界.

例. f(x) 在 [a, b] 连续, [a, b] 可微, 求证: 存在 ξ ∈ (a, b), 使 (f(b)-f(a))/(b-a) = f'(ξ).

三. 未定式极限计算

- 1. lim_{x->0} (1+2x)^n - (1+x)^n / x^2
2. lim_{x->0} ln(1-x) + ln(1+x) / x^2
3. lim_{x->0} ln(x) / ln(1-x)
4. lim_{x->0} e^x / x

四. 函数的研究

例. f(x) 在 [0, 1] 上可导, x=0 可导, f(0)=1, f'(0)≠0, 且 0 < f(x) < x, x ∈ (0, 1). 令 x_n = f(x_{n-1}), x_1 = (1, 0). 1. 求极限数列, 并求极限. 2. 求 f(x) 收敛, 并求极限.

五. Taylor 展式应用: 计算

例. 求 f(x) = e^x 的 n 次 Maclaurin 展式. 例. 求 ln(x) 的 n 阶 Maclaurin 展式. 例. 求 f(x) = ln(x) 在 x=2 处的 n 阶 Peano 展式.

六. Taylor 展式应用: 证明

例. f(x) 在 [0, 1] 上二阶可导, 且对任意 x, 有 |f''(x)| <= M, 且 f(0) = f(1) = 0. 求证: 在 [0, 1] 区间上有 |f(x)| <= M/8. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 求 y = πe^x 反函数 x = f(y) 的导数. 例. 求 y = (a^x)^e 反函数的导数.

1. 设对任意 x, 不等式 |(f(y)-f(x))/(y-x)| <= M |y-x|^n 成立, 求证 f(x) 在 (-∞, +∞) 恒为 n 阶无穷小. 证明: 由题设, |(f(y)-f(x))/(y-x)| <= M |y-x|^n. 取 x_1, 则存在 δ > 0, 对任意 |y-x_1| <= δ, 有 |(f(y)-f(x_1))/(y-x_1)| <= M |y-x_1|^n <= M δ^n. 即 |f(y)-f(x_1)| <= M δ^{n+1}. 又: 对任意 x, y 都成立, ∴ f(x) 恒为 0.

2. 若 f(x) 在 I 内可导, 则 f'(x) 在 I 上没有第一类间断点. 证明: 假设存在第一类间断点 x_0, 则 f(x) 在 x_0 处有左极限 f(x_0-0) 和右极限 f(x_0+0), 且 f(x_0-0) ≠ f(x_0+0). 对任意 x > x_0, 存在 ξ(x) ∈ (x_0, x), f'(ξ) = (f(x)-f(x_0))/(x-x_0). 对任意 x < x_0, 存在 η(x) ∈ (x, x_0), f'(η) = (f(x)-f(x_0))/(x-x_0). 又 lim_{x->x_0+0} f'(x) = A, lim_{x->x_0-0} f'(x) = B, 且 A ≠ B. 同增可证 f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0). 可导. f'(x_0) = f'(x_0) = f'(x_0).

3. 设 f(x) 在 (a, +∞) 可微, 且 lim_{x->+∞} f'(x) = A, 证明存在 ε > 0, +∞) 使 f'(x) >= A - ε. 证明: 由题设, 存在 δ > 0, 使得 x > a + δ 时, |f'(x) - A| <= ε. 取 M > 0, 使得 x > M 时, |f(x) - Ax| <= M. 对任意 x > M, 存在 ξ(x) ∈ (x, x+1), f'(ξ) = (f(x+1)-f(x))/(x+1-x) = (f(x+1)-f(x))/1. 又 f(x+1) - f(x) = A + o(1). 故 f'(ξ) = A + o(1). 故存在 ε > 0, 使得 x > M 时, f'(x) >= A - ε.

4. f(x) 在 [0, +∞) 连续可导, 且二阶可微, f'(0) < 0, f'(x) > 0, 求证: 对任意 x > 0, 都有 f(x) + f(x) > f(0) + f(x). 证明: 取 0 < x_1 < x_2 < x_3 < +∞, 且 f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3). ∴ f(x_2) - f(x_1) < f'(x_1)(x_2-x_1) < f'(x_2)(x_2-x_1) < f(x_3) - f(x_2). 即 f(x_2) + f(x_3) > f(x_1) + f(x_3).

5. 设函数 f(x) 在有理区间 (a, b) 内可导且无界, 证明 f(x) 在 (a, b) 内也无界. 证明: 假设 f(x) 在 (a, b) 内有界, 则存在 M > 0, 对任意 x ∈ (a, b), 有 |f(x)| <= M. 对任意 x > 0, 存在 ξ(x) ∈ (x, x+1), f'(ξ) = (f(x+1)-f(x))/(x+1-x) = (f(x+1)-f(x))/1. 又 f(x+1) - f(x) = A + o(1). 故 f'(ξ) = A + o(1). 故存在 ε > 0, 使得 x > M 时, f'(x) >= A - ε.

例. 设 f(x) = ln(x) + e^x, 求 dy. 例. 设 f(x) = ln(x) + e^x, 求 dy. 例. 设 f(x) = ln(x) + e^x, 求 dy.

1. lim_{x->0} (1+2x)^n - (1+x)^n / x^2 = lim_{x->0} (n(1+2x)^{n-1} * 2 - n(1+x)^{n-1} * 1) / 2x = ...

2. lim_{x->0} ln(1-x) + ln(1+x) / x^2 = lim_{x->0} (-1/x + 1/(1-x) + 1/x + 1/(1+x)) / 2x = ...

3. lim_{x->0} ln(x) / ln(1-x) = lim_{x->0} (1/x) / (-1/(1-x)) = ...

4. lim_{x->0} e^x / x = lim_{x->0} e^x / 1 = e.

例. f(x) 在 [0, 1] 上可导, x=0 可导, f(0)=1, f'(0)≠0, 且 0 < f(x) < x, x ∈ (0, 1). 令 x_n = f(x_{n-1}), x_1 = (1, 0). 1. 求极限数列, 并求极限. 2. 求 f(x) 收敛, 并求极限.

证明: 1. 对任意 n ∈ N, x_n = f(x_{n-1}) - x_{n-1} < 0, ∴ {x_n} 单调递减. 又 x_1 > 0, f(x) > 0, 即 x_n > 0. ∴ {x_n} 收敛. 2. 设 lim_{n->∞} x_n = m. 则对任意 n, x_n = f(x_{n-1}) - x_{n-1} < 0. 又有 0 < f(x) < x, ∴ m = 0. 故 x_n 收敛于 0.

例. 求 f(x) = e^x 的 n 次 Maclaurin 展式. 例. 求 ln(x) 的 n 阶 Maclaurin 展式. 例. 求 f(x) = ln(x) 在 x=2 处的 n 阶 Peano 展式.

1. 证明: 设 f(x) 是 [0, 1] 上的凸函数, 则 f(x) 在 [0, 1] 内上凹. 例. 设 f(x) 在 [0, 1] 上可导, 且对任意 x, 有 |f''(x)| <= M, 且 f(0) = f(1) = 0. 求证: 在 [0, 1] 区间上有 |f(x)| <= M/8.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 求 f(x) = e^x 的 n 次 Maclaurin 展式. 例. 求 ln(x) 的 n 阶 Maclaurin 展式. 例. 求 f(x) = ln(x) 在 x=2 处的 n 阶 Peano 展式.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

一些结论: 1. 凸函数在闭区间 [a, b] 上可导, 且对任意 x, 有 |f''(x)| <= M, 且 f(a) = f(b) = 0. 求证: 在 [a, b] 区间上有 |f(x)| <= M/8. 2. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.

例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0. 例. 设 f(x) ∈ C^2, f(0) = f(1) = 0, 求证: 存在 ξ ∈ (0, 1), 使 f'(ξ) = 0.