例题の重开 & 错题

2021年10月15日 星期五　　下午12:21

一、关于求导

例. 求 $y=xe^x$ 反函数 $x=f(y)$ 的导数.

例. 求 $y=(x^2+2)e^x$ 反函数的导数.

例. $y=y(x)$ 由方程 $3y+\sin(x^2+2y)=0$ 确定, 求 $y'(x)$.

例. $y-x-\varepsilon\sin y=0$, $\varepsilon\in(0,1)$, 求 $y(x)$ 的导数.

例. 求 $d(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))$.

例. 设 $y=\sin(2x+e^{x-\sin x})$, 求 dy.

二、微分中值有关证明

1. 设对 $\forall x, y$, 不等式 $|f(y)-f(x)|\le M|y-x|^2$ 恒成立, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恒为正常数.

11.18

2. 若 $f(x)$ 在 I 内可导, 则 $f'(x)$ 在 I 上没有第一类间断点.

11.18

3. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可微, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明 $\exists\xi\in(a,+\infty)$ 使 $f'(\xi)=0$

4. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续可导, 且二阶可微, $f''(x)<0$, $f(0)=0$, 试证: 对 $\forall x_1, x_2>0$, 都有 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$.

11.18

5. 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导且无界, 证明: $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界.

6. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可微, 求证: $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

三、未定式极限计算

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

11.19

2. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$

11.19

3. $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$

求极限:
① 等价无穷小量替换
② Taylor 展式
③ L'hospital
④ 定义

四、函数の研究

例. (P116 T10) $f(x)$ 在 $[0,a)$ 一阶可导, $x=0$ 二阶可导, $f(0)=1$, $f'(0)\ne0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令 $x_{n+1}=f(x_n)$, $x_1=(1,a)$.

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限.

(2) 求证 $\{nx_n\}$ 收敛, 并求极限.

1. 证明: 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 那么 $f(x)$ 在 I 的内点连续.

2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数且有上界. 求证: $f(x)$ 是常数.

五、Taylor 展式应用: 计算

例. 求 $f(x)=e^{-x^4}$ 的 $4n$ 次 Maclaurin 展式.

例. 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶 Maclaurin 公式.

例. 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x_0=-3$ 处的 n 阶 Peano 展式.

1. 写出 $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 的 4 阶 Peano 余项 Maclaurin 展式.

2. 写出 $f(x)=\tan x$ 的 5 阶 Peano 余项 Maclaurin 展式.

六、Taylor 展式应用: 证明

例. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且对 $\forall x$, 有 $|f''(x)|\le M$, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证: 在 $[0,1]$ 区间上有 $|f(x)|\le\dfrac{M}{8}$.

一些注意点

① 凸函数不意味着它可导.

② 凸函数等价定义

i) 对 $\forall x_1, x_2\in I$ 及 $\alpha\in(0,1)$, 有 $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$　取 $\alpha=\frac12$.

ii) $\forall x_1, x_2\in I$　$x_1<x<x_2$.

$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

iii) $\forall x_0\in I$, $\exists\alpha\in\mathbb{R}$.

$f(x)-f(x_0)\ge\alpha(x-x_0)$ 恒成立.

iv) 一阶可导时, $f'(x)\nearrow$

一阶可导时, $f(x_2)\ge f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

(v) 二阶可导时, $f''(x)\ge0$

对 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

$\Leftrightarrow f(y)\ge f(x)+f'(x)(y-x)$

($\Leftarrow$) $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(y+\lambda(x-y))$

$=f(y)+f'(y)\lambda(x-y)+o(|\lambda(x-y)|)$

$\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

$\therefore f'(y)(x-y)+\dfrac{o(|\lambda(x-y)|)}{\lambda}\le f(x)-f(y)$.

($\Rightarrow$) 取 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$.

$f(x)\ge f(z)+f'(z)(x-z)$

$f(y)\ge f(z)+f'(z)(y-z)$

$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\ge f(z)+f'(z)(\lambda(x-z)+(1-\lambda)(y-z))$

$=f(z)+f(\lambda x+(1-\lambda)y)$

③ $\frac{1}{1-x}\to f(x)=(1-x)^{-1}$. $f^{(n)}(x)=(n-1)!(1-x)^{-n}$.

④ $f(x)$ 在 x_0 处展开

$\Rightarrow f(x-x_0+x_0)=f(t+x_0)$ 在 $t=0$ 的展开.