函数极限

2021年8月12日 星期一 下午3:18

§1.1 函数

一、主义：映射

二、主要内容

1 常用性质

2 单调性

3 反函数

4 1-1对应

三、几种初等函数

1 幂函数

2 指数

3 对数函数

4 三角函数

双曲函数

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(hyperbolic：双曲的，双曲线的)

$\sinh(-x) = -\sinh x$ 奇 (通道图)

$\cosh(-x) = \cosh x$ 偶

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

例. 求双曲函数 双曲余弦的反函数.

$y = \cosh x$, $x \in [0, +\infty)$

$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$, $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$.

$e^y = \cosh y + \sqrt{\cosh^2 y - 1} = x$.

$\Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$y = \operatorname{arccosh} x$ 反函数

$e^y = \cosh y + \sqrt{\cosh^2 y - 1} = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$, $y \geq 0$ (单调增)

$\Rightarrow y = \ln(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})$, $x \geq 1$, $y \geq 0$ (单调增).

链形曲线 (悬链)

$y(x) = a(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2})$ $y(0) = a(1 + e^{-2/a})$ $(a, 0)$

$y(-1) = (1.8, a)$ $y(1) = (-0.8, -0.07)$

(单位a, 既 单位 半径)

5 常见性质 (重点 教材)

1 奇偶性：$\lim_{x\to 0}[f(x) + f(-x)] = 2\lim_{x\to 0} f(x)$

2 周期函数：

先有 x_0 是 $f_{\min}$ 的最小 or 最大 $|f(x)| \leq M$

且 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 则 $\lim_{x\to\infty} f = 0$.

3 单调性 唯一性.

先有 $\lim_{x\to\infty} f = L$ 则 $\lim_{x\to\infty} f$ 的最小 or 最大 唯一 $f(x) = L$

4 1-1对应 单调性

先有 $\lim_{x\to\infty} f = L$ 则 $\lim_{x\to\infty} f$ 的最小 or 最大 唯一 $f(x) = L$

§1.2 函数极限

一、函数在无穷大处的极限

1. 定义：f on $[a, +\infty)$ 有定义，$\lim_{x\to\infty} f = L$ 是 $\lim_{x\to\infty} f$ 的 $\lim_{x\to\infty} f = L$

如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - L| < \varepsilon$, 则称 $\lim_{x\to\infty} f = L$.

2. 性质：$\lim_{x\to\infty} f = L \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - L] = 0$

对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $X > 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $X < -X$.

3. 证明 (1) 证明 $\lim_{x\to\infty} a^x = (a > 0, a \neq 1)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|a^x - 1| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow -\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon$, 当 $x > X$ 时, $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$, 当 $x < -X$ 时, $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$, 当 $|x| > X$ 时, $|a^x - 1| < \varepsilon$.

二、函数不是一 2 处的极限

1. 定义：设 f on $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 有定义 (去心邻域)

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 则称 $\lim_{x\to x_0} f = A$.

2. 性质：单侧极限

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$

3. 例① 求证 $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, 要 $|x^2 - 0| < \varepsilon$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

$|x^2 - 0| < \varepsilon$

② 求证 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

$\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x + 1 - 2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon$

取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有 $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon$

3. 分段

5. 根据函数表现形为定义，填写下表。

	$f(x)=x$	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\tan x$
$x\to\infty$	对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $\lvert x\rvert>X$ 时, 有 $\lvert f(x)-0\rvert<\varepsilon