函数连续性

2021年8月9日 星期一 下午4:53

§2.1 函数连续性

一、定义：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，在该点连续。

i) 对于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t. $0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

ii) $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时，$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$。 在 x_0 的邻域内有定义

即 $f(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$。

$f(x)$ 在区间内任意一点均连续，则 $f(x)$ 在区间内连续。(a,b) 闭区间：单侧

iii) $f(x_0+0)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 右连续。

$f(x_0-0)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 左连续。

$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 左、右连续。

例：Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{有理}\\ 0, & x \text{无理}\end{cases}$

求证：(1) $D(x)$ 在任意一点都不连续。

(2) $f(x)=xD(x)$ 仅在 $x=0$ 连续。

证明：(1) 对于 $\forall x_0$，都存在以 x_0 为极限的有理数列 $\{t_n\}$ 和无理数列 $\{s_n\}$。

$\because \lim_{n\to\infty} D(t_n)=1$，$\lim_{n\to\infty} D(s_n)=0$，

$\therefore \lim_{x\to x_0} D(x)$ 不存在，即不连续。

(2) $f(0)=0$，则需证 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$。

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x|<\delta$，

$|f(x)|=|xD(x)|\le x<\delta=\varepsilon$，

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

假设 $f(x)$ 在 $x_0\ne 0$ 处连续，

则有 $\lim_{x\to x_0} D(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}=\frac{\lim f(x)}{\lim x}=\frac{f(x_0)}{x_0}=D(x_0)$，

表明 $D(x)$ 在 $x_0\ne 0$ 处连续，不成立。

二、性质

1. 局部有界性：$f(x)$ 在 x_0 连续 $\Rightarrow$ 在 x_0 邻域有界。

证明：对 $\varepsilon=1$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=1$，即 $f(x_0)-1<f(x)<f(x_0)+1$

2. 若 $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 连续，则其四则运算连续。

3. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(t)$ 在 t_0 处连续，$g(t_0)=x_0$，则 $f(g(t))$ 在 t_0 处连续。

证明：$f(x)$ 连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

$g(t)$ 连续 $\Rightarrow$ 对该 δ，$\exists\delta'$，当 $|t-t_0|<\delta'$ 时，有 $|g(t)-g(t_0)|<\delta$。

$\therefore$ 可得对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'$，当 $|t-t_0|<\delta'$ 时，有 $|f(g(t))-f(g(t_0))|<\varepsilon$。

4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f|_{[a,b]}$ 有反函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调，且 $f^{-1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调。

5. 基本初等函数、初等函数在其定义域上连续。c、x^α（幂函数）、$\log_a x$、a^x、三角与反三角。

例：求证 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$。

证明：$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac1x}=e$，$\therefore$ 令 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac1x}, & x\ne 0\\ e, & x=0\end{cases}$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 上连续，

$\therefore \ln f(x)=\begin{cases}\frac1x\ln(x+1), & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 上连续。

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln f(x)=1$。

三、有关间断

连续点：$f(x)$ 在 x_0 处连续。

间断点：$f(x)$ 在 x_0 处间断。

- 第一类间断点：$f(x_0+)$ 和 $f(x_0-)$ 均存在且均有限。如 $[x]$
  - 跳跃点：$f(x_0+)\ne f(x_0-)$
  - 可去间断点：$f(x_0+)=f(x_0-)\ne f(x_0)$
- 第二类间断点：$f(x_0+)$ 和 $f(x_0-)$ 至少有一个不存在或无限。如 $\sin\frac1x$

例：证明 $\cos x$、$\sin x$、a^x 在 R 上连续。

§2.2 闭区间连续

介值性
最值性
一致连续性

一、定义：

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，记为 $C[a,b]$。

二、定理

1. 零点定理：设 $f\in C[a,b]$，如果 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

证明：不妨设 $f(a)<0<f(b)$。

如果 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\xi=\frac{a+b}{2}$。

如果 $f(\frac{a+b}{2})\ne 0$，则 $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ 或 $f(b)f(\frac{a+b}{2})<0$，

则记为 $f(a_1)f(b_1)<0$，

$f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上端点异号，

有 $f(a_1)<0<f(b_1)$，$[a,b]\supset[a_1,b_1]$，$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$。

同理可得有 $f(a_n)<0<f(b_n)$

满足 $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\cdots\subset[a_1,b_1]\subset[a,b]$，

且 $b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b-a}{2^n}$。

$\therefore a_n\to\xi$，$b_n\to\xi$，$f(\xi)\le 0\le f(\xi)$，$f(\xi)=0$。

2. 介值定理：设 $f\in C[a,b]$，$f(a)\ne f(b)$，则对 $\forall\gamma\in(f(a),f(b))$，都 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\gamma$。

证明：设 $g(x)=f(x)-\gamma$。不妨设 $f(a)<f(b)$，

$\because \gamma\in(f(a),f(b))$ $\therefore f(a)-\gamma<0<f(b)-\gamma$。

根据零点定理，$\exists\xi$，使 $f(\xi)-\gamma=0$。

$C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有的连续函数。

介值定理：设 $f(x)\in C[a,b]$，且对 $\forall$ 实数 r 满足 $f(a)\le r\le f(b)$，则必 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=r$。

证明：不妨设 $f(a)<r<f(b)$，记 $[a,b]$ 的一个非空子集 $T=\{t\mid t\in[a,b],\ a\le x\le t \text{ 时 } f(x)<r\}$。

令 $\xi=\sup T$，则可证 $f(\xi)=r$。

假设 $f(\xi)<r$，

则 $\exists\delta>0$，使 $\xi<x<\xi+\delta$ 时，

§2.3 一致连续性

一、定义：连续性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。 逐点

一致连续性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall x_0\in$ 区间 I，只要 $|x-x_0|<\delta$，就均有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。 整体

/ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

否命题：不连续：$\exists\varepsilon>0$，对 $\forall\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon$。

不一致连续：$\exists\varepsilon>0$，对 $\forall\delta>0$，$\exists x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\ge\varepsilon$。

二、例 ① 证明 $f(x)=\sin x$ 一致连续。

证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|$ 放

$\le|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon$。

② 证明 $f(x)=x^2$ 非一致连续。

证明：取 $\varepsilon_0=2$，对 $\forall\delta>0$，

取 n s.t. $\frac1n<\delta$，

令 $x_1=n+\frac1n$，$x_2=n$，$|x_1-x_2|=\frac1n<\delta$，

但此时 $|f(n+\frac1n)-f(n)|=2+\frac1{n^2}>\varepsilon_0$

"去掉无穷可变为一致连续"

③ 证明 $f(x)=\frac1x$ 在 $(0,1)$ 不一致连续，但在 $[a,1]$ 上一致连续。$(0<a<1)$

证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=a^2\varepsilon$，

对 $x_1,x_2\in[a,1]$，

当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$\left|\frac1{x_1}-\frac1{x_2}\right|=\left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right|<\frac{|x_2-x_1|}{a^2}<\frac{\delta}{a^2}<\varepsilon$。

$f(x)=\frac1x$ 在 $(0,1)$ 连续，

取 $x_0=\frac1n$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)}$，

s.t. $|x-x_0|<\delta$ 时，

$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac1x-\frac1{x_0}\right|=\left|\frac1x-n\right|<\varepsilon$。

$\therefore n-\varepsilon<\frac1x<n+\varepsilon$，$\frac1{n+\varepsilon}<x<\frac1{n-\varepsilon}$。

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，对 $\forall x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

习题 2.1

习题 2.2

复合连续函数

$f(x)$ 在 $x_0=g(t_0)$ 处连续，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta_0>0$，使当 $|x-x_0|<\delta_0$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

对给定的 δ_0，$\exists\delta_\varepsilon>0$，使当 $|t-t_0|<\delta_\varepsilon$，有 $|g(t)-g(t_0)|<\delta_0$ $\therefore |f(g(t))-f(g(t_0))|<\varepsilon$。

例 (P62 T12) 若有 $\lim_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim_{x\to x_0}v(x)=b$，则 $\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$。（$a$ 是有限正数，b 是有限实数）

证明：$\lim_{x\to x_0}\ln u(x)=\ln a$，$\lim_{x\to x_0}v(x)=b$。（连续）

$\therefore \lim_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)=b\ln a$

$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{b\ln a}=a^b$（连续）

连续函数的性质和运算

一、性质

1. 局部保序性、局部有界性。
2. 四则运算连续。
3. 复合后连续。
4. 反函数连续性：定义在区间中的严格单调连续函数，其反函数在对应区间中是严格单调连续函数。

$f(x)$ 有反函数

$\Leftrightarrow f(x)$ 是单值函数（$x_1\ne x_2$，$f(x_1)\ne f(x_2)$）

$\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调函数。

假设非严格单增 $a_1,b_1\in[a,b]$，$a_1<b_1$，$f(a_1)\ge f(b_1)$

非严格单减 $a_2,b_2\in[a,b]$，$a_2<b_2$，$f(a_2)\le f(b_2)$

构造 $F(t)=f(b_1+t(b_2-b_1))-f(a_1+t(a_2-a_1))$，$t\in[0,1]$。

$F(0)=f(b_1)-f(a_1)\le 0$，$F(1)=f(b_2)-f(a_2)\ge 0$

① $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$。

② $F(0)$、$F(1)$ 都 $\ne 0$ $\Rightarrow \exists t_1\in(0,1)$，$F(t_1)=0$。

$\Rightarrow$ 违背单值性。

5. 初等函数在其定义区间内是连续的。

闭区间上连续函数性质

一、定理