11.17 复习/习题

2021年11月17日 星期三　　上午9:44

§1. 第2章主要内容

极限：定义、性质、判别、计算（归纳、重要）。
（判别上方注：夹逼、单调有界、Cauchy）

连续：定义、性质（一致及有界闭）。

间断、定义

微分 dy、$\frac{dy}{dx}$

各类！（常值、系）

Cauchy 写法

Taylor 记清楚

推导 → 生成

四条公式

Leibniz 公式

$\frac{du}{u} = \ln|u|$

例1. 求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x e^{x^2}}{(\arctan x)^3}$

(1) $a_n = \frac{3}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{3}\times\underbrace{\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{3}{n}}_{单减}$ （$n\geq 4$时）

$\leq \frac{9}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$，又 $a_n > 0$

(2) $\sqrt[n]{n\times\sqrt{1}} < a_n < \sqrt[n]{n\times\sqrt{n}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^{x^2}}{(\arctan x)^3} \sim \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^{x^2}}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{6} - x - x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{7}{6}$.

例2. $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

试证 (1) $\alpha > 1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(2) $\alpha > 2$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

证明 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$，连续.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{x} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$

$\alpha > 1$，$x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} > x\sin\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = 0$.

$\therefore f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$，可导.

(2) 由(1)，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = 0 = f'(0)$，连续.

导数极限定理，

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.（极限存在）

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

例3. 求平面曲线 $L: 3y + \sin(x^2+2y) = 0$

在点 $M(\sqrt{\pi}, 0)$ 处切线的斜率.

$y = y(x)$. $3 + \cos(x^2+2y)\cdot(2x+2) = 0$.

$3 + (2\sqrt{\pi}+2)\cos(\sqrt{\pi}+y) = 0$.

$3y' + \cos(x^2+2y)\cdot(2x+2y') = 0$

$y'(3 + 2\cos(x^2+2y)) = -\cos(x^2+2y)\cdot 2x$

$y' = -\frac{2x\cos(x^2+2y)}{3+2\cos(x^2+2y)}$.

例4. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 C^2，$f(0)=0$，$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

(1) 确定 a 的值使 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 C.

(2) 对(1)中确定的 a，试证 $g'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 C.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0)$ （只需保证 $x=0$ C）.

连续，$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = a$，$a = f'(0)$.

(2) $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x\neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$　　$g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ C^1.

$\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{xf''(x) + f'(x) - f'(x)}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$ 存在. 导函数极限.

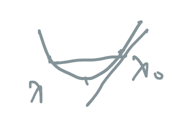
$\therefore g'(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ C.

例5. $f(x)$ 在 I 中二阶可导且 $f''(x) > 0$. 试证：

对于 I 中任意 $x\neq x_0$，恒有

$f(x) > f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

证明：$f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 I 中下凸.



取 $\xi\in(x, x_0)$，有 $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0)$

S_2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}$

$> f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

例6. $f(x)$ 在 $[a, a+\frac{1}{2}]$ 上二阶可导，$f(a) = f'(a) = 0$

且有 $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$.

试证：$x\in I = [a, a+\frac{1}{2}]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

证明：① $f''(x)$ 在 I 上有界.

$f(x)$ 在 I 上连续可导，$f(x)$ 有界.　根据闭区间连续函数有界.

$f'(x)$ 在 I 上连续可导，$f'(x)$ 有界.

记 $p = \sup\{|f''(x)| : x\in I\}$. 非空有上界 → 上确界.

② Taylor　$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)(x-a)^2}{2}$，$\xi\in(x,a)$

$= \frac{f''(\xi)(x-a)^2}{2} \leq p\times\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}p$.

③ $\forall x\in I$，$\exists\eta\in(x,a)$，$f'(x) = f'(a) + f''(\eta)(x-a)$

$\therefore f'(x) = f''(\eta)(x-a)$，$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}p$.

$\therefore |p| \leq |\frac{1}{2}p| + |\frac{1}{8}p|$. $p = 0$

④ $f''(x) \leq p = 0$. $f''(x) = 0$.

推广：将闭区间改为开区间 $(-\infty,+\infty)$，

结论仍成立.

看作无限个 $[a, a+\frac{1}{2}]$ 拼接.

将 $\frac{1}{2}$ 改成 $\forall\varepsilon > 0$ 也成立.

例. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导，$f''(x) = -f(x)$.

试证：$f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x \equiv 0$.

$F(x) = f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x$.

$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导.

$F(0) = F'(0) = 0$，且 $F''(x) = -F(x)$.

有二阶导 → 连续 → 有界闭区间上有界.

记 $p = \sup\{|F''(x)| : 0\leq x\leq 1\}$.

当 $0\leq x\leq 1$ 时，$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\xi)}{2}x^2$

$= \frac{F''(\xi)x^2}{2} = -\frac{F(\xi)x^2}{2}$.　（$F''(\xi)\to p$，$x^2\to\leq 1$）

$\therefore |F(x)| \leq \frac{p}{2}$

$\therefore |F''(x)| \leq \frac{p}{2}$，$p\leq\frac{p}{2}$. $\therefore p = 0$

$\therefore F''(x)\equiv 0$. $F'(x)\equiv F'(0) = 0$. $F(x)\equiv F(0) = 0$.

$\therefore$ 在每一个闭区间上都为0.