证明の重开

2021年9月24日 星期五　　下午7:04

1. 论 24 种定义

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$：对 $\forall M$，$\exists X$，当 $x>X$ / $x<-X$ 时，$f(x)>M$ / $<-M$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$：对 $\forall M$，$\exists\delta$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>M$ / $<-M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\pm\infty$：对 $\forall M$，$\exists\delta$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f(x)>M$ / $<-M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\pm\infty$：对 $\forall M$，$\exists\delta$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f(x)>M$ / $<-M$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$：对 $\forall M$，$\exists X$，当 $x>X$ / $x<-X$ 时，$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$：对 $\forall M$，$\exists\delta$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$：对 $\forall M$，$\exists\delta$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$：对 $\forall M$，$\exists\delta$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=A$：对 $\forall\varepsilon$，$\exists X$，当 $x>X$ / $x<-X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$：对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$：对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l \iff \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$.

证明：($\Leftarrow$) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$，对 $\forall\varepsilon$，$\exists\delta_1$，当 $x_0<x<x_0+\delta_1$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$. $\exists\delta_2$，当 $x_0-\delta_2<x<x_0$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$.
取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $\exists\delta$，$0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-l|<\varepsilon$.

3. 复合函数的极限（书 n 道）55(1)

4. 函数极限与数列极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l \iff$ 对 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ 的数列，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$.

证明：($\Rightarrow$) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，对给定的 δ，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_0|<\varepsilon$，$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$.
$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$.

($\Leftarrow$) 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 不成立，
即 $\exists\varepsilon>0$，对 $\forall\delta$，都 $\exists x$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|\ge\varepsilon$.
$\therefore$ 取 $\delta_n=\frac1n$，当 $0<|x_n-x_0|<\delta_n=\frac1n$，有 $|f(x_n)-l|\ge\varepsilon$.（$x_n\to x_0$）
与条件 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$ 矛盾.

5. 简单夹逼 → 一般夹逼

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，若 $0<|g(x)|<f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=g(x)=l$，若 $f(x)<h(x)<g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l$.

6. 单调有界：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调有界，则对 $\forall x_0\in(a,b)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在.

证明：不妨设 $f(x)$ 单调递减.
设 $E=\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$，$\alpha=\sup E$，$\beta=\inf E$.
$\because\beta$ 为下确界，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1>x_0$
使得 $\beta<f(x_1)<\beta+\varepsilon$.
对 $\forall x\in(x_0,x_1)$，有 $\beta\le f(x)<f(x_1)<\beta+\varepsilon$.
$\therefore|f(x)-\beta|<\varepsilon$，且是 $x>x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\beta$

7. 柯西：设 $f(x)$ 在 x_0 去心邻域内有定义，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，对 $\forall x',x''\in B_-(x_0,\delta)$，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，$\iff\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

证明：($\Rightarrow$) [$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-l|<\varepsilon$]
则取 $x_1,x_2\cdots x_n$，满足 $|x_n-x_0|<\delta$，且
$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$
$x_0-\delta<x_n<x_0+\delta$，$\{x_n\}$ 有界.
$\therefore\exists\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的收敛子列，
对 $\forall\delta>0$，$\exists K$，当 $k>K$ 时，$|x_{n_k}-x_0|<\delta$.
$\therefore$ 对给定的 δ，使对 $\forall\varepsilon>0$，
当 $|x_{n_k}-x_0|<\delta$ 时，$|f(x_{n_k})-f(x_0)$

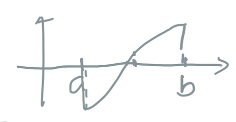
($\Leftarrow$) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，
当 $0<|x_1-x_0|$，$|x_2-x_0|<\delta$ 时，
都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，
$\therefore$ 取数列 $a_n\to x_0$，
即对 $\forall\delta>0$，$\exists N$，当 $m,n>N$ 时
有 $|a_n-x_0|<\delta$，$|a_m-x_0|<\delta$，
也满足 $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$.
$\therefore\{f(a_n)\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=l$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，
有 $0<|a_n-x_0|<\delta$.
对 $\forall 0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(a_n)|<\varepsilon$.
$|f(x)-l|=|f(x)-f(a_n)+f(a_n)-l|$
$\le|f(x)-f(a_n)|+|f(a_n)-l|<2\varepsilon$.

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，
有 $0<|a_n-x_0|<\delta$，$0<|f(a_n)-l|<\varepsilon$.
$\therefore|f(x)-l|=|f(x)-f(a_n)+f(a_n)-l|$
$<|f(x)-f(a_n)|+|f(a_n)-l|<2\varepsilon$.

1. 零点定理：设 $f\in C[a,b]$，如果 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证明：不妨设 $f(a)<0<f(b)$.



如果 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\xi=\frac{a+b}{2}$.
如果 $f(\frac{a+b}{2})\neq0$，则 $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ 或 $f(b)f(\frac{a+b}{2})<0$
则记为 $f(a_1)f(b_1)<0$，
$f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上端点异号，
有 $f(a_1)<0<f(b_1)$，$[a,b]\supset[a_1,b_1]$，$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$.
同理可得有 $f(a_n)<0<f(b_n)$
满足 $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\cdots\subset[a_1,b_1]\subset[a,b]$
且 $b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b-a}{2^n}$.
$\therefore a_n\to\xi$，$b_n\to\xi$，$f(\xi)\le0\le f(\xi)$，$f(\xi)=0$.

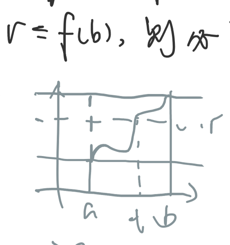
2. 介值定理：设 $f\in C[a,b]$，$f(a)\neq f(b)$，则对 $\forall\gamma\in(f(a),f(b))$，都 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\gamma$

证明：设 $g(x)=f(x)-\gamma$. 不妨设 $f(a)<f(b)$，
$\because\gamma\in(f(a),f(b))$　$\therefore f(a)-\gamma<0<f(b)-\gamma$.
根据零点定理，$\exists\xi$，使 $f(\xi)-\gamma=0$.

$C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有的连续函数.

介值定理：设 $f(x)\in C[a,b]$，且对 $\forall$ 实数 r 满足 $f(a)<r<f(b)$，则必 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=r$.

证明：



设 T 为 $[a,b]$ 的一个子集，$T=\{x\mid a\le x\le b,\ f(x)\le r\}$.
设 $\xi=\sup T$.
假设 $f(\xi)>r$，$\exists\delta$，当 $\xi-\delta<x<\xi$ 时，有 $f(x)>r$. $\therefore x\notin T$. 又 $x<\xi$，$\therefore\xi\neq\sup T$.
假设 $f(\xi)<r$，$\exists\delta$，当 $\xi<x<\xi+\delta$ 时，有 $f(x)<r$. 又 $x>\xi$，$\therefore\xi\neq\sup T$
$\therefore f(\xi)=r$.

3. 有界性：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则在 $[a,b]$ 有界.

证明：假设 $f(x)$ 无界.
连续：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
无界：对 $\forall M$，$\exists x\in[a,b]$，使 $f(x)\ge M$.
设 $\{x_n\}\in[a,b]$，使 $f(x_n)\ge M$.
x_n 有界，$\exists$ 收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，对 $\forall\delta$，$\exists K$，
当 $k>K$ 时，有 $|x_{n_k}-x_0|<\delta$
$\therefore\lim x_{n_k}=x_0$. 又 $f(x)$ 连续，
当 $|x_{n_k}-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，此时矛盾.

1. 连续性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

一致连续性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$
$\{\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，对 $\forall x_0\in I$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

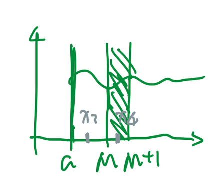
三. 定理：闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明：设 $f(x)\in C[a,b]$.
对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
假设 $f(x)$ 不一致连续.
则 $\exists\varepsilon>0$，使对 $\forall\delta$，$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，
当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明：假设 $f|_{[a,b]}$ 不一致连续.
则对某个(确定的) $\varepsilon_0>0$，
对 $\forall\delta=\frac1n$，$\exists x_{n_1},x_{n_2}\in[a,b]$，
当 $|x_{n_1}-x_{n_2}|<\delta=\frac1n$，有 $|f(x_{n_1})-f(x_{n_2})|\ge\varepsilon_0$.
$\therefore\exists\{x_{n_k}\}\to x_{n_1}$. 闭区间数列有收敛子列
由于 $|x_{n_{k_1}}-x_{n_{k_2}}|<\frac1{n_k}\to0$，$\therefore\{x_{n_{k_2}}\}\to x_{n_1}$.
且 $|f(x_{n_{k_1}})-f(x_{n_{k_2}})|\to0$　$\because f(x)$ 连续.
又 $|f(x_{n_{k_1}})-f(x_{n_{k_2}})|\ge\varepsilon_0$，则 $\varepsilon_0\le0$ 矛盾.

例① 若 $f|_{[a,+\infty)}$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.
求证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>a$，
Cauchy收敛. s.t. $x_1,x_2>M$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.



又 $\because f|_{[a,M+1]}$ 连续，
$\therefore f|_{[a,M+1]}$ 一致连续.
即 $\exists\delta_1$，对 $\forall x_3,x_4\in[a,M+1]$，
且 $|x_3-x_4|<\delta$，有 $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.
取 $\delta=\min\{\delta_1,1\}$，
则对 $\forall x',x''\in[a,+\infty)$，
当 $|x'-x''|<\delta$ 时，
有 $x',x''\in[a,M+1]$ 或 $x',x''\in[M,+\infty)$.
$\therefore|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立，一致连续.