例题の重开 及解题

2021年9月24日 星期五 下午7:05

一、定义类

例 1. 证明 $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.

例 2. 证明 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

例 3. 证明 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x} = 2$.

11.18 例 4. $\lim_{x\to 0} a^x = 1$

例 5. $\lim_{x\to 1}\ln x = 0$

二、重要极限、连续性相关

1. 求证：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

例：试证 $\lim_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0$

试证 $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

例：试证 $\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$（证其连续）.

例：(1) 试证当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，恒有 $\sin x < x < \tan x$

（或 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$）.

(2) 试证：$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2. 已有 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n = (1+\frac{1}{n})^n\right) = e$，求证 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

3. 设 $f(x)$ 为多项式，证明 $\exists x_0$，使得 $|f(x_0)| \le |f(x)|$ 对 $\forall x\in R$ 成立.

4. 设 $x_1, x_2 \cdots x_n \in [0,1]$，记 $f(x) = \frac{|x-x_1|+\dots+|x-x_n|}{n}$，

证明：$\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$

9. 对 $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$.

(1) 证明：$P_n(x)$ 有且仅有一个正根 x_n

(2) 证明：数列 x_n 收敛，并求极限.

6. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，$f(x_0)\ne 0$，求证：

$\exists\delta>0$，使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号.

三、无穷小量替换

例：求 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(3) 求证：$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1$.

例：$\lim_{x\to\infty}(3x+2)(x-5)\sin\frac{1}{x^2-4}$.

例：$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^2\arcsin x}$

例：$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x\to+\infty$ 的情况.

例：求 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

例：求 $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

四、其他结论、习题

1. 求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{3x}$.

2. 例：证当 n 无穷大时，证明对 $\forall a>1, \alpha>0, m>0$，

有 $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$

3. 常数 $0<\alpha<1$. 试证

(1) $\lim_{x\to+\infty}[(x+c)^\alpha - x^\alpha] = 0$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}[(x\ln x)^\alpha - x^\alpha] = 0$

(3) $0<\beta<1-\alpha$，$\lim_{x\to+\infty}[(x+x^\beta)^\alpha - x^\alpha] = 0$

增强.

五、一致连续性

例 1. 证明 $f(x) = \sin x$ 一致连续.

例 2. 证明 $f(x) = x^2$ 非一致连续.

例 3. 证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 不一致连续，但在 $[a,1]$ 上一致连续.（$0<a<1$）.

例 4. 若 $f|[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x) = L$.

求证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

5. 试证 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

6. 试证 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致连续.

7. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上一致连续，

求证：$f(x)$ 在 a 上的右极限和 b 的左极限都存在.

一些补充结论 & 注意点.

① $f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 将收敛数列映到收敛数列

$f(x)$ 一致连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 将 Cauchy 列映到 Cauchy 列.

收敛数列：$|a_n - a| < \varepsilon$，如 $\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$

Cauchy 列：$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$，如 $\{\frac{1}{n}\}$.

Cauchy 列包含收敛列，可得一致连续比连续强

② 区间性质：保序性. → 取 ε / $x>x_0$

函数反合数列构成子列 → 构造.

---

1. 证明 $\lim_{x\to+\infty}a^x = 0$ $(0<a<1)$

[要证 $\lim_{x\to+\infty}a^x = 0 \Leftrightarrow |a^x - 0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow a^x < \varepsilon \Leftrightarrow x\ln a < \ln\varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$]

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $X = \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$，

当 $x > \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ 时，有 $|a^x - 0| < \varepsilon$.

2. 求证 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0$.

[要证 $|x\sin\frac{1}{x}| < \varepsilon$，求取 δ

$|x\sin\frac{1}{x}| \le x < \delta$]

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

有 $|x\sin\frac{1}{x}| \le x < \delta = \varepsilon$.

3. 求证 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x} = 2$

[要证 $\frac{x^2-1}{x^2-x} - 2 = \frac{x^2-1-2x^2+2x}{x^2-x}$

$= \frac{-(x^2-2x+1)}{x^2-x} = \frac{-(x-1)}{x} < \varepsilon$. 放

取 $\delta = \_\_$，$0<|x-1|<\delta$ 时

取 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$（在 1 附近研究）]

对 $\forall\varepsilon>0$，当 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ 时，

取 $\delta = 2\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x} - 2\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right| < 2|x-1| < 2\delta < \varepsilon$.

4. $\lim_{x\to 0}a^x = 1$ $(a>1)$.

设 $\varepsilon\in(0,1)$

$|a^x - 1| < \varepsilon$ （分析法证明）

$\Leftrightarrow 1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon \Leftrightarrow \log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$

令 $\delta_\varepsilon = \min\{|\log_a(1-\varepsilon)|, \log_a(1+\varepsilon)\}$.

（区间，取小，都满足）

则当 $0<|x-0|<\delta_\varepsilon$ 时，就有 $|a^x-1|<\varepsilon$.

由 ε 任意性及极限定义，得 $\lim_{x\to 0}a^x = 1$.

5. $\lim_{x\to 1}\ln x = 0$.

$|\ln x| < \varepsilon$，$-\varepsilon < \ln x < \varepsilon$，$e^{-\varepsilon} < x < e^{\varepsilon}$，

对 $\forall\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon\in(0,1)$，

取 $\delta = \min\{1-e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon}-1\}$，

则有 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|\ln x| < \varepsilon$.

例：试证 $\lim_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0$

试证 $\lim_{x\to x_0}a^x = a^{x_0}$. $\lim_{t\to 0}a^t = 1$.

$\lim_{x\to x_0}a^x = \lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}\cdot a^{x_0} = a^{x_0}\lim_{x-x_0\to 0}a^{x-x_0} = a^{x_0}$

$\lim_{x\to x_0}\ln x = \lim_{x\to x_0}(\ln\frac{x}{x_0} + \ln x_0)$

$= \lim_{x\to x_0}\ln\frac{x}{x_0} + \ln x_0 = \ln x_0$.

例：试证 $\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$（证其连续）.

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

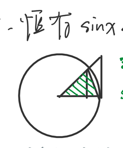
$|\cos x - \cos x_0| = \left|2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$ 和差化积

$\le \left|2\times\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0| < \varepsilon$.

（$|\cos x - \cos x_0| \le |x-x_0|$，夹逼）.

例：(1) 试证当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，恒有 $\sin x < x < \tan x$

（或 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$）.



$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$

$S_\triangle$ $S_{扇}$ $S_\triangle$

(2) 试证：$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$.

已证 $\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$，$\therefore \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$.

夹逼 $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$.

偶函数，$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（$\lim_{x\to 0^-}f(x) = \lim_{x\to 0^+}f(-x) = \lim_{t\to 0^+}f(t) = \lim_{x\to 0^+}f(x)$）.

引理：$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin x < x < \tan x$.

$\therefore \frac{\sin x}{x} < 1$，$\frac{\sin x}{x} = \frac{\tan x}{x}\cos x > \cos x$.

$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\times\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$.

$\therefore 1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1$，$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$x\to 0^-$，即 $x<0$，设 $y = -x > 0$，

则有 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-y)}{-y} = \frac{\sin y}{y}$，$\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1$，

$\therefore \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1$. $\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2. 已有 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n = (1+\frac{1}{n})^n\right) = e$，求证 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

证明：先考虑 $x\to+\infty$. $[x] < x < [x]+1$ 离散.

$\therefore \frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{[x]}$，$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

$\therefore \underbrace{(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}}_{e}\underbrace{(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}}_{1} < (1+\frac{1}{x})^x < \underbrace{(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}}_{e}\underbrace{(1+\frac{1}{[x]})}_{1}$

$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

当 $x<0$，$x\to-\infty$ 时，记 $y = -x > 0$.

$\therefore (1+\frac{1}{x})^x = (1-\frac{1}{y})^{-y} = (\frac{y}{y-1})^y = (1+\frac{1}{y-1})^y$

$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1}) = e$.

3. 设 $f(x)$ 为多项式，证明 $\exists x_0$，使得 $|f(x_0)| \le |f(x)|$ 对 $\forall x\in R$ 成立.

不妨设 $a_n > 0$.

$f(x)$ 奇次：$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$. $x\to-\infty$，$f(x)\to-\infty$.

$f(x)$ 连续. $\exists x_0$ 使 $f(x_0) = 0$

$f(x)$ 偶次：$|x| > |X|$，有 $|f(x)| \ge M$.

$|x| \le |X|$，即 $x\in[-N,N]$，有界闭区间

$\because f(x)$ 连续，$\therefore \exists$ 最小值 m.

取 $f(x_0) = \min\{M, m\}$.

4. 设 $x_1, x_2 \cdots x_n \in [0,1]$，记 $f(x) = \frac{|x-x_1|+\dots+|x-x_n|}{n}$，

证明：$\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$

$f(x)\in C[0,1]$，$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x-x_i|$.

$f(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|0-x_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x_i| \ge 0$

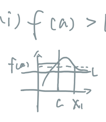
$f(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|1-x_i| \ge 0$，$f(0)+f(1) \ge 1$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\frac{1}{2}-x_i| \le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\times n = \frac{1}{2}$.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，试证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 或有最大值或最小值.

设 $\lim_{x\to+\infty}f(x) = L$.

(i) $f(a) > L$，则 $\exists\delta$，使对 $\forall x\in(a, a+\delta)$ 有 $f(x) > L$.



取 $\varepsilon = \frac{f(a)-L}{2}$，$\exists X_1$，当 $x > X_1$ 时，

有 $|f(x) - L| < \varepsilon$，$f(x) < \frac{f(a)+L}{2} < f(a)$.

即在 $[X_1,+\infty)$，$f(x)_{max} = f(a) \triangleq M_1$.

又 $\because$ 在 $[a, X_1]$ 连续，$\therefore$ 存在最大值 M_2.

$\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有最大值 $M = \max\{M_1, M_2\}$.

(ii) $f(a) < L$，同理.

(iii) $f(a) = L$.

① $f(x) \equiv L$，常数函数，$f(x)_{max} = f(x)_{min} = L$.

② $f(x) \not\equiv L$，非常数函数.

$\therefore \exists x_0\in[a,+\infty)$，$f(x_0) > L$ 或 $f(x_0) < L$.

不妨设 $f(x_0) > L$，根据 (i)，$M = \max\{M_1, M_2\}$

9. 证明: 对任意自然数 n, 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}(n\geqslant 1)$ 收敛, 并求其极限.

$F_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$.

$F(0) = -1 < 0$，$F(x) \sim x^n\ (x\to+\infty)$，$F(x)\to+\infty$.

$F_n(x_n) = 0$. $F_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + F_n(x_n) > F_{n+1}(x_{n+1})$

$F_n(x)$ 单减，$F(x_n)$ 单增. $\Rightarrow x_n$ 单减（反之）.

又 $x_n > 0$，则 $\{x_n\}$ 收敛. $\lim_{n\to\infty}x_n = x_0$.

$\frac{x_0^n - 1}{x_0 - 1} - 2 = 0$. $\frac{-1}{x_0-1} = 2$. $x_0 = \frac{1}{2}$.

T9. $f_n(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0$ $f_n(1) = n-1 > 0$

$\therefore \exists x_n\in(\frac{1}{2},1)$，s.t. $f(x_n) = 0$

$f_n'(x) = nx^{n-1} + \dots + 2x + 1 > 1$.

$\therefore f_n(x)$ 单增，$\therefore$ 一个正根 $x_n\in(\frac{1}{2},1)$. $\{x_n\}$ 收敛.

$x_n > 0$，$\exists\xi\in(\frac{1}{2}, x_n)$ 使 $|f_n(x_n) - f_n(\frac{1}{2})| = |f_n'(\xi)||x_n - \frac{1}{2}|$

$\therefore |x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2^n} \to 0$

$x_n \to \frac{1}{2}$.

6. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，$f(x_0)\ne 0$，求证 $\exists$ 一个正数 δ，使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号.

证明：假设对 $\forall\delta>0$，$\exists x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$，

使 $f(x)f(x_0) < 0$.

不妨设 $f(x_0) > 0$，$f(x) < 0$

$\because f(x)$ 连续，$\therefore$ 取 $\varepsilon = f(x_0)$，$\exists\delta$，

当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0)$.

$\therefore 0 < f(x) < 2f(x_0)$，即 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号

与 $\forall\delta>0$ 都使异号矛盾. 故假设不成立

例：求 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(3) 求证：$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1$.

(1) 令 $x = \sin t$，$t = \arcsin x$，原式 $= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$.

严格单调连续，一一对应.

可理解为复合函数极限进行求解.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

(3) 记 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\alpha(x) = e$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}[\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\ln\alpha(x)$

$= \lim_{t\to e}\ln t = 1$.

令 $e^t - 1 = x$，$t = \ln(1+x)$，

$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

例：$\lim_{x\to\infty}(3x+2)(x-5)\sin\frac{1}{x^2-4}$.

原式 $= \lim_{x\to\infty}3x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2} = 3$.

$3x+2\sim 3x$，$x-5\sim x$，$\sin\frac{1}{x^2-4}\sim\frac{1}{x^2-4}\sim\frac{1}{x^2}$.

例：$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^2\arcsin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x} = \frac{1}{2}$.

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$

$= \lim_{x\to 0}1\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$.

例：$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x\to+\infty$ 的情况.

不妨设 $x>1$，$x\to+\infty$.

对 $\forall x>1$，$\exists k$，s.t. $2^{k-1} < x < 2^k$.

$\therefore \ln x < k\ln 2 < k$，

$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{k}{x} < \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{k}{(1+1)^{k-1}} = \frac{2k}{(1+1)^k}$

二项式 $\le \frac{2k}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{4}{k-1}$，$\lim_{k\to+\infty}\frac{4}{k-1} = 0$.

$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

对 $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\alpha\ln x}{\alpha x^\alpha} = \frac{\ln x^\alpha}{\alpha x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}\to 0$.

例：求 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

原式 $= \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$ → $[(\frac{x}{2^n}) - \frac{1}{6}(\frac{x}{2^n})^3 + \dots]\times 2^n$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$.

例：求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

原式 $= \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

$\lim_{x\to\infty}x^2\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}t\ln\frac{t+1}{t-1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)-\ln(t-1)}{\frac{1}{t}}$

$= \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}}{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2t^2}{t^2-1} = 2$. $\therefore$ 原式 $= e^2$.

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = 2$.

---

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{4x+1}\right)^{3x}$

$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{4x+1}\right)^{\frac{4x+1}{-4}\cdot\frac{-4}{4x+1}\cdot 3x}$ 记 $\frac{-12x}{4x+1}\to -3$

$= e^{-3}$

2. 当 n 无穷大时，证明对 $\forall a>1, \alpha>0, m>0$，有 $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$：$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n} < \frac{1}{n}\times 1 \to 0\ (n\to\infty)$

拓展：$n \sim e\sqrt[n]{n!}\ (n\to\infty)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m}\cdot\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n}$

$< \frac{a^m}{m!}\times 1\times 1\times\dots\times 1\times\frac{a}{n}$. $n>m>a$，$\frac{a}{m+1}<1$. 常数 $\frac{a}{n}\to 0$.

$\therefore 0 < \frac{a^n}{n!} < \lim_{n\to\infty}\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{n} = 0$.

（只证 $m=1$）

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$：对 $\forall\alpha>0$，$\exists m\in N$，使 $m\le\alpha<m+1 \Rightarrow n^m \le n^\alpha < n^{m+1}$

$\Rightarrow \frac{\ln n}{n^{m+1}} < \frac{\ln n}{n^\alpha} \le \frac{\ln n}{n^m} \Rightarrow \frac{\ln n^{m+1}}{n^{m+1}(m+1)} < \frac{\ln n}{n^\alpha} \le \frac{\ln n^m}{n^m\times m}$

令 $n^m = N$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}\frac{\ln N}{N} = \frac{1}{m}\ln\lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{N} = \frac{1}{m}\ln 1 = 0$

同理，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^{m+1}}{n^{m+1}\times(m+1)} = 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n} = 0$：对 $\forall\alpha>0$，$\exists m\in N$，使 $m\le\alpha<m+1 \Rightarrow \frac{n^m}{a^n} \le \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^{m+1}}{a^n}$

下证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{m+1}}{a^n} = 0$

由 $a>1$，有 $a^n = (1+\lambda)^n$，$\lambda>0 \Rightarrow a^n > C_n^{m+2}\lambda^{m+2}$

$0 < \frac{n^{m+1}}{a^n} < \frac{n^{m+1}}{C_n^{m+2}\lambda^{m+2}} = \frac{(m+2)!}{\lambda^{m+2}}\cdot\frac{n^{m+1}}{n(n-1)\cdots(n-m-1)}$

$= \frac{(m+2)!}{\lambda^{m+2}}\cdot\frac{1}{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{m}{n})(n-m-1)} \to 0\ (n\to\infty)$

同理可证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^m}{a^n} = 0$

3. 常数 $0<\alpha<1$. 试证

(1) $\lim_{x\to+\infty}[(x+c)^\alpha - x^\alpha] = 0$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}[(x\ln x)^\alpha - x^\alpha] = 0$

(3) $0<\beta<1-\alpha$，$\lim_{x\to+\infty}[(x+x^\beta)^\alpha - x^\alpha] = 0$

增强.

$f(x) = (x+x^\beta)^\alpha - x^\alpha$ $t\to 0$，$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$

$= x^\alpha\left[(1+\frac{1}{x^{1-\beta}})^\alpha - 1\right] \sim x^\alpha\cdot\alpha\frac{1}{x^{1-\beta}} = \frac{\alpha}{x^{1-\alpha-\beta}}$.

$1-\alpha-\beta>0$，$f(x)\to 0$

4. $f(x)$ 在 R 上连续，且对 $\forall x$ 有 $f(2x) = f(x)$，求证：$f(x)$ 是常数.

证明：假设不是常值，即 $\exists x_1, x_2$，$f(x_1)\ne f(x_2)$.

$\therefore$ 对 $\forall m, n$，有 $f(\frac{x_1}{2^m}) \ne f(\frac{x_2}{2^n})$. 利用条件

$\lim_{m\to\infty}f(\frac{x_1}{2^m}) = \lim_{n\to\infty}f(\frac{x_2}{2^n}) = f(0)$. 矛盾.

$\therefore f(x)$ 是常值函数

---

1. 证明 $f(x) = \sin x$ 一致连续.

证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，

$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right| \le |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$. 放

2. 证明 $f(x) = x^2$ 非一致连续.

证明：取 $\varepsilon_0 = 2$，对 $\forall\delta>0$，取 n s.t. $\frac{1}{n}<\delta$，

令 $x_1 = n+\frac{1}{n}$，$x_2 = n$，$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} < \delta$，

但此时 $|f(n+\frac{1}{n}) - f(n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon_0$.

去掉无穷可变为一致连续

3. 证明：$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续，但在 $[a,1)$（$0<a<1$）上一致连续.

证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = a^2\varepsilon$，对 $x_1, x_2\in[a,1]$，

当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，

$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right| < \frac{|x_2-x_1|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} < \varepsilon$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 连续，

取 $x_0 = \frac{1}{n}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta = \frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)}$

s.t. $|x - x_0| < \delta$ 时，

$|f(x) - f(x_0)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = |\frac{1}{x} - n| < \varepsilon$.

$\therefore n - \varepsilon < \frac{1}{x} < n + \varepsilon$，$\frac{1}{n+\varepsilon} < x < \frac{1}{n-\varepsilon}$.

$\frac{1}{n+\varepsilon} - \frac{1}{n} < x - x_0 < \frac{1}{n-\varepsilon} - \frac{1}{n}$.

$-\frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)} < x - x_0 < \frac{\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}$

取 $x_0' = 1 - \frac{1}{n}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta = \frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))}$

s.t. $|x - x_0| < \delta$ 时，

$|f(x) - f(x_0)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = |\frac{1}{x} - \frac{n}{n-1}| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \frac{n}{n-1} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{n}{n-1} + \varepsilon$

$\frac{n-1}{n+\varepsilon(n-1)} < x < \frac{n-1}{n-\varepsilon(n-1)}$

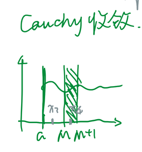
$-\frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))} < x - x_0' < \frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n-\varepsilon(n-1))}$

4. 若 $f|[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x) = L$.

求证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证明：$\lim_{x\to+\infty}f(x) = L$，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>a$，

Cauchy 收敛. s.t. $x_1, x_2 > M$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 一致连续对应柯西列.



又 $\because f|[a, M+1]$ 连续，

$\therefore f|[a, M+1]$ 一致连续.

即 $\exists\delta_1$，对 $\forall x_3, x_4\in[a, M+1]$，

且 $|x_3 - x_4| < \delta_1$，有 $|f(x_3) - f(x_4)| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$，

则对 $\forall x', x''\in[a,+\infty)$，

当 $|x' - x''| < \delta$ 时，

有 $x', x''\in[a, M+1]$ 或 $x', x''\in[M,+\infty)$.

$\therefore |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 成立，一致连续.

5. 求证 $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明：注意到 $x_2 \ge x_1 \ge 0$ 时有：

$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \le \sqrt{x_2 - x_1}$ （两边平方可证）.

$x_2\ge 0$，$x_1\ge 0$，$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \le \sqrt{|x_2 - x_1|}$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta = \varepsilon^2$

对 $\forall x_1\ge 0$，$x_2\ge 0$，$|x_2 - x_1| < \delta$，

都有 $|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \le \sqrt{|x_2 - x_1|} = \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

6. 试证 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致连续.

证明：$\exists\varepsilon\_\_$，对 $\forall\delta$，当 x，

构造子对列 (x_n, x_n')，$\lim_{n\to\infty}|x_n - x_n'| = 0$，

但 $|f(x_n) - f(x_n')| \ge \varepsilon_0$（不一致连续）.

取 $x_n = \sqrt{2n}$，$x_n' = \sqrt{2n+1}$.

可验证 $\lim_{n\to\infty}|x_n - x_n'| = 0$

$|f(x_n) - f(x_n')| = |\sin(n\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)| = 1$.

取 $\varepsilon > 1$，则对 $\forall\delta>0$，$|x_n - x_n'| < \delta$，

$|f(x_n) - f(x_n')| = 1$，不一致连续

7. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上一致连续，

求证：$f(x)$ 在 a 上的右极限和 b 的左极限都存在.

证明：$f(x)$ 一致连续，$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，

当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$

令 $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n = a$.

$\therefore$ 对 $\forall\delta$，取 $N = [\frac{(b-a)}{\delta}]+1$，当 $n>N$ 时，对 $\forall p>0$，

有 $|x_{n+p} - x_n| < \delta$. $\therefore |f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore f(x_n)$ 是 Cauchy 列，记 $\lim_{n\to\infty}f(x_n) = A$.

取 $p\to+\infty$，$n = N$，有 $|A - f(x_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore$ 对 $\forall x\in(a, a+\delta)$，→ a 的右极限处

有 $|f(x) - A| = |f(x) - f(x_N) + f(x_N) - A|$

$\le |f(x) - f(x_N)| + |f(x_N) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.