数列

2021年8月11日 星期三　上午9:47

§1.1 数列极限

一、定义：对 $\forall \varepsilon>0$（任意小），都 $\exists N$，→（不是唯一的）
当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.
则称 a 是 $\{a_n\}$ 的极限 / $\{a_n\}$ 收敛于 a，
记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. / $a_n\to a\ (n\to\infty)$.
有极限的数列称为收敛数列。
（旁注：判断数列不以 a 为极限）否命题：$\exists\varepsilon>0$，对 $\forall N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|\geq\varepsilon$.
不收敛的数列称为发散数列。

$\exists M>0$，对 $\forall n$，都有 $|a_n|\leq M$.
则称数列 $\{a_n\}$ 有界.（有下界和上界）

例：求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\frac{1}{\varepsilon}-1$，当 $n>N$ 时，$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.（定义证明→逆推）

$\left|\frac{N}{N+1}-\frac{N+1}{N+1}\right|=\left|\frac{-1}{N+1}\right|<\varepsilon$，$\frac{1}{\varepsilon}<N+1$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\varepsilon}-1$，当 $n>N$ 时，$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\left|\frac{N}{N+1}-1\right|<\varepsilon$.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

二、性质

1. 改变数列的有限项，不影响收敛数列的极限.（考虑充分大）
2. 收敛数列的极限是唯一的.

证明：假设数列 $\{a_n\}$ 有两个极限 a,b.
不妨设 $a<b$，令 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$.
对该 $\varepsilon>0$，必 $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$.
$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，$|a_n-b|<\varepsilon$.
则当 $n>\max\{N_1,N_2\}$，
有 $|a_n-a|<\frac{b-a}{2}$，$|a_n-b|<\frac{b-a}{2}$. 不存在.

3. 收敛数列一定有界.

证明：设 $\lim a_n=a$. ……

（主要的性质）
1. 线性性
2. 简单的夹逼性
3. 尾部保序性

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>c$，则从某项起恒有 $a_n>c$.（证明）

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，且有无穷多项满足 $a_n\leq c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq c$.

证明：反证法，再用 3 后的结论推.（3 后的证明也可以反证法同 3）

0° 完备性定理
1° 确界原理
2° 单调有界
3° 区间套
4° 波尔查诺
5° 柯西

$1°\Rightarrow2°$ …… $2°\Rightarrow3°$ …… $5°\Rightarrow5°$

§1.2 数列收敛的判别法则

一、引理：实数 R 满足连续性（完备性）
公理. $X\subset R$，$Y\subset R$，
对 $\forall x\in X$，$y\in Y$，$x\leq y$
都 $\exists c\in R$，使得 $x\leq c\leq y$.

1. 确界原理：R 中任意有界子集必有确界.
设 $X\subset R$，$\alpha=\sup X$，则对 $\forall\varepsilon>0$，
$\exists x\in X$，使得 $\alpha\geq x>\alpha-\varepsilon$.（小一点都不是上确界）

2. 单调性：单调且有界的数列一定收敛.
（单增有上界 / 单减有下界）

证明：不妨设 $\{a_n\}$ 单增有上界，
则 $\{a_n\}$ 有上确界 $\alpha=\sup\{a_n\}$.
$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，
有 $\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha$，$\therefore|a_n-\alpha|<\varepsilon$.

例①. 求 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots}}}$ / $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$a_1=\sqrt{2}$ 极限.

1) 单调：$n=1$ 时，$a_2=\sqrt{2+a_1}>\sqrt{2}=a_1$.
$n\geq2$，假设 $a_{n+1}>a_n$ 成立，
$a_{n+2}-a_{n+1}=\sqrt{2+a_{n+1}}-\sqrt{2+a_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{2+a_{n+1}}+\sqrt{2+a_n}}>0$.
$\therefore a_{n+2}>a_{n+1}$
$\therefore$ 可得对 $n\in N^*$，$a_{n+1}>a_n$，$\{a_n\}$ 单增.

2) 有界：$n=1$ 时，$a_1=\sqrt{2}<2$
$n=2$ 时，$a_2<\sqrt{2+2}=2$.
假设 $a_n<2$，则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<2$.
$\therefore$ 可得 $a_n<2$ 恒成立，$\{a_n\}$ 有上界.

3) 收敛：$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$a_{n+1}^2=a_n+2$，……

三、发散到 ∞ 的数列

（$a_n<-M\to\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$；$a_n>M\to\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$）

1. 定义：$\forall M>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n|>M$.
（区分无上界：$\forall M>0$，一定 $\exists n$，使 $a_n>M$.）
2. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 的数列为无穷大量，
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的数列为无穷小量.（非零 a_n 无穷小量 → $\frac{1}{a_n}$ 无穷大量）
3. 如果 $a_n\to0$，$b_n\to0$，
则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}0 & \text{时，称 } a_n \text{ 为 } b_n \text{ 的高阶无穷小量}\\ \infty & \text{低阶}\\ a & \text{同阶}\end{cases}$
当 $a=1$ 时，称为等价无穷小量.

四、Stolz 定理.
设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：① b_n 严格↑且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，
② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$（充分性），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.（差商→微商）
设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：① b_n 严格↓且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，
② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$（若为 ∞，则不可用.），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

$\frac{\infty}{\infty}$. 引理：$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots\frac{a_n}{b_n}\right\}<\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k}<\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

$A=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=0$.
设 $\varepsilon>0$，则 $\exists N_0$，当 $n>N_0$ 时，$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right|<\varepsilon$.
又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{N_0}}{b_n}=0$.
$\therefore\exists N_\varepsilon>N_0$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，$\left|\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$.
$\therefore\left|\frac{a_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}+\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|\leq\left|\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|+\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}\right|\leq\frac{1}{2}\varepsilon+\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}\right|$ ……

Stolz 定理.
引理：和比与分比的关系. → 证明！
若所有 $a_n>0$，则有
$\min\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}_{k=1}^n\leq\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq\max\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}_{k=1}^n$

$\frac{*}{\infty}$ 型 Stolz 定理.
假设 $\{b_n\}$ 严格递增发散到 ∞ 且
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$（$A=+\infty,-\infty$ 等）
此处证明 A 为有限实数时.
证明：不妨设 b_n 恒为正.
$A=0$ 时，设 $\varepsilon>0$，则 $\exists N_0$，当 $n>N_0$ 时，
有 $\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$.（利用合分比）
另有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{N_0}}{b_n}=0$（$\frac{\text{常数}}{\text{无穷大}}$）
$\therefore\exists N_\varepsilon>N_0$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，$\left|\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$.
$\left|\frac{a_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}+\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|\leq\left|\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|+\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}\right|$
$<\frac{1}{2}\varepsilon+\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n-b_{N_0}}\right|$
$=\frac{1}{2}\varepsilon+\left|\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{N_0+1}-a_{N_0})}{(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_{N_0+1}-b_{N_0})}\right|$
$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$.
$A\neq0$ 时，记 $A_n=a_n-Ab_n$.
即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-A_n}{b_{n+1}-b_n}=0$.
则证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{b_n}=0$ 即可，同 $A=0$ 的方法.

吉米多维奇（P52 34）

[illegible]