实数

2021年8月9日 星期一　　下午4:52

一、自然数和整数.

1. 自然数：$N=\{0,1,2,\cdots\}$. $N^+=\{1,2,3,\cdots\}$.
对加法运算封闭.

整数：$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.
对加减法运算封闭

2. 性质：① 对加法、乘法封闭.
② 存在序（大小关系）.
③ 归纳公理.
$S\subset N$，且满足 $1\in S$，$n\in S$，$n+1\in S$，则 $S=N$.

3. 定理：① 最小数定理：$S\subset N$，$S\neq\varnothing$，则 S 中一定有最小数.
证明：∵ $S\neq\varnothing$，∴ $\exists n\in S$，
∴ $S\cap\{1,2,\cdots,n\}$ 有限且非空.
∴ S 中存在最小数.

② 数学归纳法：命题 A_n 满足
1° $n=1$，A_n 成立.
2° A_n 成立 $\Rightarrow A_{n+1}$ 成立.
可得命题 A_n 成立.
证明：假设 $\exists i\in N$ 使 A_i 不成立.
设 $S=\{n\mid A_n$ 不成立$\}\subset N$.
∵ $i\in S$，$S\neq\varnothing$.
∴ S 中存在最小数 m，A_m 不成立.
又∵ A_1 成立，$1\notin S$，∴ $m>1$.
∵ m 为最小数，∴ $m-1\notin S$，A_{m-1} 成立.
又∵ A_m 不成立，∴ 与 2° 矛盾.
∴ 不存在 i，即所有 A_n 都成立

二、无限集合.

1. 定义 $f: A\to B$

可数集合.
① 单射：$\forall a,a'\in A$，$a\neq a'$，则 $f(a)\neq f(a')$.
② 满射：对 $\forall b\in B$，$\exists a\in A$，使 $f(a)=b$.
③ 1-1 映射：单射且满射.

*不可数集合：幂集.
如 $A=\{a,b\}$，$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.
Counter 定理：2^N 的基数不可数.

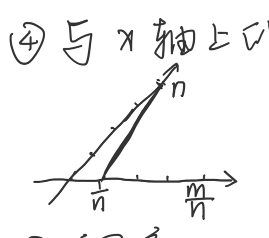
2. 概念：① 若 A、B 1-1 对应，则 A、B 有同基数（势）.
② 若 $\exists A\to B$ 的满射，则 A 势 $\geq B$ 势.
若该满射非单射，则 A 势 $>B$ 势.
③ 称自然数集 N 的基数为可数的。
与 N 1-1 对应的集合 A 为无限集合，也可数.
A 的势为 n，与 N 相同.

3. 性质：① 设 U 为无限集合，若满射 $f: N\to U$，则 U 可数.
② 有限集 $\cup$ 可数集、可数集 $\cup$ 可数集、可数个可数集取并集 → 可数集.
③ $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_+\cup\{0\}\cup\mathbb{Z}_-$
④ 定义 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$，
若 A、B 为可数集，则 $A\times B$ 可数.

三、有理数

1. 定义：$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z},q\neq0\right\}$. 有限&无限循环

2. 性质：① 对加、减、乘、除封闭.
② 存在序：$\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}=\frac{mn'-m'n}{nn'}$.
③ 基数：$N\xrightarrow{\text{满射}}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{\text{满射}}\mathbb{Q}$
④ 与 x 轴上的点存在对应.



⑤ 稠密性：对 $\forall a<b\in\mathbb{Q}$，$\exists c\in\mathbb{Q}$，
（证明：取 $c=\frac{a+b}{2}$）且 $a<c<b$.

3. 局限：不连续.

例1. 证明 $\sqrt{6}$ 为无理数.
假设 $\sqrt{6}$ 为有理数，则 $\sqrt{6}=\frac{p}{q}$. $(p,q)=1$. 互质.
∴ $p=\sqrt{6}q$，$p^2=6q^2$. ∴ p^2 里有因子 6
∴ p^2 里必有因子 6^2，p 里有因子 6
设 $p=6k$，$p^2=36k^2=6q^2$，∴ $q^2=6k^2$.
∴ q^2 含因子 6，∴ q^2 含因子 6^2，q 含因子 6.
则与 $(p,q)=1$ 矛盾，假设不成立.

例2. r_1、r_2 不全为 0，求证 $r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{3}$ 为无理数.
i) $r_1=0$，$r_2\neq0$，原式 $=\sqrt{3}r_2$.
ii) $r_1\neq0$，$r_2=0$，原式 $=\sqrt{2}r_1$.
iii) $r_1\neq0$ 且 $r_2\neq0$，假设 $r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{3}=\frac{p}{q}$.
∴ $q^2(2r_1^2+3r_2^2+2\sqrt{6}r_1r_2)=p^2$，
$\sqrt{6}=\dfrac{\frac{p^2}{q^2}-2r_1^2-3r_2^2}{2r_1r_2}$，为有理数，矛盾.
看：有

例3. 证明：不存在 $a\in\mathbb{Q}$ 满足 $a^2=2$.
S_1：同例1，反证法 a 为无理.
S_2：$X=\{a\in\mathbb{Q}\mid a<0$ 或 $a^2<2\}$，
$Y=\{a\in\mathbb{Q}\mid a^2>2$ 且 $a>0\}$，
X 中无最大的有理数
且 Y 中无最小的有理数，
$X\cap Y=\varnothing$，$X\cup Y=\mathbb{Q}\Rightarrow X$、$Y$ 间无有理数.
设 $a\in\mathbb{Q}$，$a>0$. 记 $a'=a-\frac{a^2-2}{a+2}=\frac{2a+2}{a+2}\in\mathbb{Q}$，
则有 $a'^2-2=\frac{2(a^2-2)}{(a+2)^2}\in\mathbb{Q}$. 构造计算.
若 $a\in X$，则 $a'\in X$，且 $a'>a$，无最大.
若 $a\in Y$，则 $a'\in Y$，且 $a'<a$，无最小.

四、实数

1. 定义：$\mathbb{R}$ 实数集（有理+无理）$\xleftrightarrow{1\text{-}1}$ 直线.

2. 概念：① 距离
1) $\rho(M_1,M_2)>0$ 正定性
2) $\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$
3) $\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)\geq\rho(M_1,M_3)$

② 邻域

③ 有序：满足 $a<b$（大小关系唯一）
$a<b$，$b<c\to a<c$（传递）.

④ 有界：对 $\forall a\in S$，$\exists m,n$，使 $a\leq m$，$a\geq n$.
则 m 为上界，n 为下界（不唯一）
↓
确界 上确界：最小的上界 $\sup E$
　　 下确界：最大的下界 $\inf E$.
↓
确界原理：S 是有序集，S 中非空有上下界的集合有上下确界.

⑤ 域：集合 S 满足 $0,1\in S$，对四则运算封闭，
↓ 满足负元（相反数）、逆元（倒数）.
有序域：S 有序且是域，满足加法
↓ 大小关系不变，正正相乘仍正.
实数域：$\mathbb{R}$ 是有序域，且满足确界原理.

3. 性质：① 完备性（补全有理数例3）
有理数 $\mathbb{Q}$ 包含于实数集 $\mathbb{R}$.
② $\mathbb{R}$ 中元素与实轴 1-1 对应.
③ 实数的基数不可数

4. 定理
① 阿基米德定理：对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x>0$，
都 $\exists n$，使 $nx>y$.
证明：设 $E=\{nx\mid n\in N\}\in\mathbb{R}$.
假设原命题不成立，则 $\exists x\in\mathbb{R}$，
对 $\forall n$，都有 $nx\leq y$.
∴ 数集 E 有上界，记 $M=\sup E$.

例1. $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$ 都是无理数.
[$\sqrt{n}$ 正整数 / 无理数.
$n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$，$r_1\sim r_k$ 有奇则无法开.]

2. 若有理数 r_1、r_2 不全为零，则 $r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{3}$ 是无理数.

1. 假设 $\sqrt{2}$ 为有理数，记 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z})$. $(p,q)=1$ 互质.
$q\sqrt{2}=p$，$2q^2=p^2$. 记 $p^2=2t$，则 p^2 中有因子 2，
∵ p^2 为平方数，则必有 2^2 为因子. p 有因子 2.
又∵ $p^2=2q^2$，则 q^2 中有因子 2，q 中有因子 2.
∴ 与 $(p,q)=1$ 矛盾. 假设不成立.
$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$ 证明过程相同.

2. i) 若 r_1、r_2 中有一个为零，不妨设 $r_1=0$，$r_2\neq0$.
∴ $r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{3}=\sqrt{3}r_2$ 无理数.
ii) 若 r_1、r_2 都不为零.
假设 $r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{3}=q$.（有理数）.
∴ $2r_1^2+3r_2^2+2r_1r_2\sqrt{6}=q^2$.
∴ $\sqrt{6}=\frac{q^2-2r_1^2-3r_2^2}{2r_1r_2}$　（$\frac{\text{有理}}{\text{有理}}=$有理）矛盾）.

3. 若正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等 $(n\geq2)$，则
必有 $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}<\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.
引理：若 $x_1<\bar{x}<x_2$，则必有 $x_1x_2<(x_1+x_2-\bar{x})\cdot\bar{x}$.
（$\bar{x}^2-x_1\bar{x}-x_2\bar{x}+x_1x_2=(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)<0$）.
1° $n=2$ 时，$a_1\neq a_2$，$\sqrt{a_1a_2}<\frac{a_1+a_2}{2}\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2>0$ ✓
2° 假设 $n=k$ 时成立，
3° $n=k+1$ 时，记 $\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}$　不全相等必有存数.
不妨设 $a_k<\bar{a}<a_{k+1}$，则有
$a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}<a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k+a_{k+1}-\bar{a})\bar{a}$.
由 2° 假设，$a_1a_2\cdots a_{k-1}\underbrace{(a_k+a_{k+1}-\bar{a})}_{\to a_k}$
可能全相同 $\leq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+(a_k+a_{k+1})-\bar{a}}{k}\right)^k$.
∴ $a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}<\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}-\bar{a}}{k}\right)^k\bar{a}$.
$\leq\bar{a}^k\cdot\bar{a}=\bar{a}^{k+1}$ 计算
∴ $a_1a_2\cdots a_{k+1}<\bar{a}^{k+1}$，即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}>\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}$

② 稠密性
1) 有理数在实数域上稠密.
对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$，一定 $\exists c\in\mathbb{Q}$，使 $a<c<b$.
证明：引理（结论）$[x]\leq x<[x]+1\leq x+1$.
i) 若 $b-a>1$，则 $\exists c\in\mathbb{Z}$，使 $a<c<b$.
ii) 若 $0<b-a<1$，则 $\exists k\in N^+$，
使 $10^k(b-a)>1$.
∴ $10^ka<[10^ka]+1\leq10^ka+1<10^kb$.
∴ $a<\frac{[10^ka]+1}{10^k}<b$，得证.

2) 对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$，一定 $\exists$ 无理数 c，使 $a<c<b$.
证明：取 $\frac{a}{\sqrt{2}}<\frac{b}{\sqrt{2}}$，利用①的结论.
$\exists c_0\in\mathbb{Q}$ 使 $\frac{a}{\sqrt{2}}<c_0<\frac{b}{\sqrt{2}}$，
∴ $a<\sqrt{2}c_0<b$. 得证.

例：证明若正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等 $(n\geq2)$，则
必有 $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}<\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.
证明：引理：若 $x_1<\bar{x}<x_2$，则 $x_1x_2<(x_1+x_2-\bar{x})\bar{x}$.
（移项有 $(\bar{x}-x_2)(\bar{x}-x_1)<0$，$\bar{x}^2-(x_1+x_2)\bar{x}+x_1x_2<0$）
1° $n=2$ 时，$\sqrt{a_1a_2}<\frac{a_1+a_2}{2}\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2>0$ ✓.
2° 假设 $n=k$ 时，$\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ 成立，
则 $n=k+1$ 时，令 $\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}$
则可设 $a_k<\bar{a}<a_{k+1}$. 平均数. 有大小波动/离散
可能全相等 $a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}<a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k+a_{k+1}-\bar{a})\bar{a}$
∴ $\leq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+(a_k+a_{k+1}-\bar{a})}{k}\right)^k\bar{a}$　看作 a_k.
$=\left(\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k}-\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k(k+1)}\right)^k\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k+1}$
$=\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k}\right)\bar{a}^k\bar{a}=\bar{a}^{k+1}$　（计算）.
即有 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}<\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$
综合 1°、2° 得证.