证明の重开

2021年9月19日 星期日　　下午6:43

一、定义

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$。

二、性质

1. 线性性：$\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1a+c_2b$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，

对 $\forall\varepsilon$，$\exists N_1, N_2$，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

当 $n>N_2$ 时，有 $|b_n-b|<\varepsilon$.

$\therefore n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$，$|b_n-b|<\varepsilon$.

$\therefore |c_1a_n+c_2b_n-c_1a-c_2b|$

$=|c_1(a_n-a)+c_2(b_n-b)|$

$\le c_1|a_n-a|+c_2|b_n-b|<(c_1+c_2)\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1a+c_2b$.

2. 尾部保序性：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>c$，则从某项起有 $a_n>c$

证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>c$，即对 $\forall\varepsilon$，

$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$.

则取 $\varepsilon=a-c$，$-a+c<a_n-a<a-c$，

即 $a_n>c$.

若数列 a_n 收敛，且有无穷多项满足 $a_n\ge c$，则有 $\lim a\ge c$.

证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即对 $\forall\varepsilon$，$\exists N$，

当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$.

$\therefore$ 取 $\varepsilon=a-c$，$-a+c<a_n-a<a-c$

$\therefore 2a-c>a_n\ge c$，$a>c$.

$\Rightarrow$ 收敛数列必有界.

证明：取 $\varepsilon=1$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

$|a_n-a|<\varepsilon=1$，$a-1<a_n<a+1$.

$1\le n\le N$ 时，$a_n\in\mathbb{R}$，

$\therefore$ 由 $\{a_n\}$ 中项组成的数集中有最大值、最小值.

取 $a_m=\sup\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$.

$a_n=\inf\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$.

取 $M_1=\max\{a_m,a+1\}$

$M_2=\min\{a_n,a+1\}$.

取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$.

$\therefore$ 对 $\forall n$，$|a_n|<M$. $\therefore$ 有界.

收敛数列极限唯一.

证明：假设极限不唯一，有 l_1, l_2 为数列极限.

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

$|a_n-l_1|<\varepsilon$，$|a_n-l_2|<\varepsilon$.

取 $\varepsilon=\frac{l_2-l_1}{2}$，则不存在 a_n，

同时满足 $a_n<\frac{l_1+l_2}{2}$，$a_n>\frac{l_1+l_2}{2}$.

3. 简单的夹逼性：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$0<|b_n|<a_n$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon$.

$0<|b_n|<a_n<\varepsilon$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

一般的夹逼性：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$，若有

$a_n<c_n<b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$.

证明：$c_n=a_n+c_n-a_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-b_n|<\varepsilon$.

$\therefore |c_n-a_n|<|b_n-a_n|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=l$.

4. 四则运算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

有 $|b_n-b|<\varepsilon$，$b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$，$b_n>\frac{1}{2}b$

则此时 $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b_n-b}{b_nb}\right|<\frac{\varepsilon}{b_nb}<\frac{2\varepsilon}{b^2}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\frac{1}{b_n}$.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$|a_n-a|<\varepsilon$，$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|<\varepsilon$.

$\therefore \left|a_n\frac{1}{b_n}-a\cdot\frac{1}{b}\right|=\left|a_n\frac{1}{b_n}-a_n\frac{1}{b}+a_n\frac{1}{b}-a\cdot\frac{1}{b}\right|$

$=\left|a_n\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}(a_n-a)\right|$

$\le a_n\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|+\frac{1}{b}|a_n-a|$

$\le a_n\cdot\varepsilon+\frac{1}{b}\cdot\varepsilon\le M\cdot\varepsilon+\frac{1}{b}\cdot\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

5. 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a\Leftrightarrow$ 任意子列收敛于 a.

证明：$(\Rightarrow)$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

则对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$.

$\exists K$，当 $k>K$ 时，有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. $(n_k>N)$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$.

$(\Leftarrow)$ 对数列 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$，

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，当 $k>K$ 时，$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$.

假设 a_n 不收敛于 a.

① 没有极限，则 $\exists\varepsilon$，对 $\forall N$，

当 $n>N$ 时，$|a_n-a|\ge\varepsilon$.

则 $\exists K$，当 $k>K$ 时，$n_k>N$，

使 $|a_{n_k}-a|\ge\varepsilon$. 矛盾.

② 不以 a 为极限.

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

有 $|a_n-b|<\varepsilon$.

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，当 $k>K$ 时，$n_k>N$，

有 $|a_{n_k}-b|<\varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=b$.

收敛数列极限唯一. 矛盾.

三、六个等价命题.

1° 实数具有完备性.

对 $\forall X, Y\in\mathbb{R}$，对 $\forall x\in X$，$y\in Y$，$\exists c\in\mathbb{R}$，

使 $x\le c\le y$.

2° 确界原理.

有上(下)界的数集一定有上下确界.

设 $X\in\mathbb{R}$，$\alpha=\sup X$，则对 $\forall\varepsilon>0$，

$\exists x\in X$，使得 $\alpha\ge x>\alpha-\varepsilon$.

3° 单调有界 $\Rightarrow$ 收敛.

4° 区间套定理.

对 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\dots\supset[a_n,b_n]$，

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则 $\exists$ 唯一 $I\in[a_n,b_n]$

5° 列紧性定理

任何有界数列都存在收敛子列.

6° Cauchy 收敛准则.

若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m, n>N$ 时，有

$|a_m-a_n|<\varepsilon$，则 a_n 收敛

2°→3° 不妨设 a_n 单调递增，$|a_n|\le M$.

$\Rightarrow$ 有上确界，记为 $\alpha=\sup E$.

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon$，$\alpha>a_n>\alpha-\varepsilon$. $\therefore |a_n-\alpha|<\varepsilon$.

3°→4° a_n 单增，b_n 单减，

$a_1<a_2<a_3<\dots<a_n<b_n<\dots<b_2<b_1$

$a_n<b_1$，$b_n>a_1$，$\therefore$ 为有界数列.

$\therefore a_n, b_n$ 收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n-a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b-a=0$.

$\therefore b=a$，$\therefore$ 只有一个 $a\in[a_n,b_n]$

4°→5° 对数列 $a_n\in[a,b]$.

则 $[a,\frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2},b]$ 中一个区间有无限项，

记为 $[a_1,b_1]$.

…… 记有无限项的区间为 $[a_n,b_n]$.

根据区间套定理，$\exists$ 唯一 $x\in[a_n,b_n]$.

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n-a_n=0$，$a_n<a_{n_k}<b_n$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=x$，收敛

5°→6° 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m, n>N$ 时，有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

① 基本列一定有界.

取 $\varepsilon=1$，$-1<a_m-a_n<1$.

$\therefore |a_n|\le|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|\le1+|a_{N+1}|$.

取 $M=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n,1+|a_{N+1}|\}$.

则有 $|a_n|\le M$. $\therefore a_n$ 有界.

$\therefore \{a_n\}$ 必存在一个收敛子列.

② 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_{n_k}-c|<\varepsilon$.

又对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-c|<\varepsilon$.

$\therefore |a_n-a|\le|a_n-c+c-a_{n_k}|<2\varepsilon$.

/ 记 $A_n=\inf\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\dots\}$.

$B_n=\sup\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\dots\}$.

则有 $A_n<A_{n+1}<B_{n+1}<B_n$

$\therefore$ 数列 A_n, B_n 收敛.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon$ 当 $m, n>N_\varepsilon$ 时，

$|a_m-a_n|<\varepsilon$，$a_n-\varepsilon<a_m<a_n+\varepsilon$.

$\therefore B_n-\varepsilon<A_n$，$B_n-A_n<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(B_n-A_n)=0$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}B_n=A_1=B_1$.

(V)→(III)

由 $b_n-a_n\to0\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，当 $n>N$ 时，$0<b_n-a_n<\varepsilon$

当 $m>n>N$ 时，$a_n\le a_m\le b_m\le b_n\Rightarrow|a_m-a_n|<b_n-a_n<\varepsilon$

由(V)，$\{a_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c_0$，则 $b_n=(b_n-a_n)+a_n\to c_0\ (n\to\infty)$

且 $a_n\le c_0\le b_n$，若还有 h_0 满足 $a_n\le h_0\le b_n$，则有 $0<|a_0-h_0|\le b_n-a_n$

故 $a_0-h_0=0$

(III)→(I)

设 $\{a_n\}=E$ 有上界 $M>0$，使 $a_n\le M$，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，任取 $a\in E$，作 $[a,M]$，$[a,M]$ 右侧无 E 中之点，为正则区间

二等分，$[a,M]=[a,\frac{a+M}{2}]\cup[\frac{a+M}{2},M]$，则二子区间中必有1个为正则区间，记此区间为 $[\alpha_1,\beta_1]$

将 $[\alpha_1,\beta_1]$ 二等分，二者中必有1个子区间为正则区间，记为 $[\alpha_2,\beta_2]$

得到 $[\alpha_n,\beta_n]$ 为正则区间，$[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]$，$\alpha_n-\beta_n=\frac{M-a}{2^n}\to0\ (n\to\infty)$

由(III)，$\exists$ 唯一常数 $c_0\in[\alpha_n,\beta_n]$，$n=1,2\cdots$

现证 $c_0=\sup E=\sup\{a_n\}$

对 $\forall x\in E$，$x\le\beta_n$ 令 $n\to\infty$，$x\le\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=c_0$，故 c_0 为 E 的一个上界

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in E$，$c_0-x<\beta_n-\alpha_n<\varepsilon$，$x>c_0-\varepsilon$ 即 $\begin{cases}x\le c_0, \forall x\in E\\ \forall\varepsilon>0, \exists x\in E, 使 x>c_0-\varepsilon\end{cases}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$

故 $c_0=\sup E$

6°→3° 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m, n>N$ 时，有 $0<b_n-a_n<\varepsilon$.

$\therefore$ 有 $0<|a_m-a_n|<|b_n-a_n|<\varepsilon$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=c$.

则对 $b_n=(b_n-a_n)+a_n$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=c$.

若 $\exists a_n<h<b_n$，则有 $0<|a_n-h|<|b_n-a_n|$，$c=h$.

四、Stolz.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

$\frac{\infty}{\infty}$. 引理：$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\}<\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}<\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

$A=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=0$.

设 $\varepsilon>0$，则 $\exists N_0$，当 $n>N_0$ 时，$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right|<\varepsilon$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{N_0}}{b_n}=0$.

$\therefore \exists N_\varepsilon>N_0$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，$\left|\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

$\therefore \left|\frac{a_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}+\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|\le\left|\frac{a_{N_0}}{b_n}\right|+\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}\right|$

$\le\frac{1}{2}\varepsilon+\left|\frac{a_n-a_{N_0}}{b_n}\right|$

$=\frac{1}{2}\varepsilon+\left|\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\dots+(a_{N_0+1}-a_{N_0})}{(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\dots+(b_{N_0+1}-b_{N_0})}\right|$.

$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$.

$A\ne0$，记 $c_n=a_n-Ab_n$，$a_n=Ab_n+c_n$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{A(b_{n+1}-b_n)-(c_{n+1}-c_n)}{b_{n+1}-b_n}=A$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(A-\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}\right)=A$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=0$

故只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{b_{n+1}}=0$. 同上.