补充题

2021年9月17日 星期五　　上午9:40

数分习题

1. 求证：$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1}=a$，$\lim_{n\to\infty} a_{2k}=a$ 时，$\lim_{n\to\infty} a_n=a$。

$\lim_{n\to\infty} a_{2k+1}=a$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K_1$，$k>K_1$ 时，$|a_{2k+1}-a|<\varepsilon$。

$\exists K_2$，$k>K_2$ 时，$|a_{2k}-a|<\varepsilon$。

取 $N=2\max\{K_1,K_2\}+1$

则 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$。

2. 已知 $a\ge 0$，$\lim_{n\to\infty} a_n=a$。

求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$。$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$。

$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}$

$a=0$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时，$|a_n-a|=|a_n|<\varepsilon^2$。

$\therefore \sqrt{a_n}<\varepsilon$。$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0=\sqrt{a}$。

$a>0$。$\frac{|a_n-a|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon$。

5. $0<a_n<2$，$a_{n+1}(2-a_n)\ge 1$。

求证 $\{a_n\}$ 单调，并求 $\lim_{n\to\infty} a_n$。

$2a_{n+1}-a_{n+1}a_n-1\ge 0$　　$a_{n+1}\ge\frac{1}{2-a_n}$

$a_{n+1}-a_n\ge\frac{1}{2-a_n}-a_n=\frac{1-a_n(2-a_n)}{2-a_n}=\frac{a_n^2-2a_n+1}{2-a_n}\ge 0$ ↗

极限 $a(2-a)\ge 1$。$a^2-2a+1\le 0$

7. $a_n=\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin(2\times 1)}{2^2}+\frac{\sin(3\times2\times1)}{3^2}+\cdots+\frac{\sin(n!)}{n^2}$

$a_{n+p}-a_n=\frac{\sin(n+p)!}{(n+p)^2}+\frac{\sin(n+p-1)!}{(n+p-1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+1)!}{(n+1)^2}$

$\le\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{1}{(n+p-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$

9. $a_n>0$ $\{A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 收敛于 A。

求证：$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ 收敛。

$P_n=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)$

$1+a_n>1$，单增。

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

有 $|a_1+a_2+\cdots+a_n-A|<\varepsilon$。

$P_n\le\left(\frac{1+a_1+\cdots+1+a_n}{n}\right)^n=\left(\frac{n+A_n}{n}\right)^n$

$=\left(1+\frac{A_n}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{A_n}{n}\right)^{\frac{n}{A_n}}\right]^{A_n}$ → 收敛到 e^A。

A_n 单增。收敛到 A ⇒ $A_n\le A$

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$。

$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$

$a_n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2$

$<\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$

$\therefore 0<a_n^2<\frac{1}{2n+1}$，$0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

夹逼 → $a_n\to 0$

$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[n^2]{n(n-1)\cdots1}\ge 1$。

$\sqrt[n^2]{n(n-1)\cdots1}<\sqrt[n^2]{n\cdot n}$

$(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$

$0<\frac{1}{n^2}\ln(n!)\le\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)$

$\frac{\ln(n(n-1)\cdots2\times1)}{n^2}=\frac{\ln n+\ln(n-1)+\cdots+\ln 2+\ln 1}{n^2}$

$=\frac{1}{n}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n-1)}{n}+\cdots+\frac{\ln 2}{n}+\frac{\ln 1}{n}\right)$

$\le\frac{1}{n}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n-1)}{n-1}+\cdots+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 1}{1}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$。$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0$

16. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a<1$，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$　　保序性

取 s 满足 $0\le a<s<1$。有 $\sqrt[n]{a_n}<s<1$。

$0<a_n<s^n<1$。

$\lim_{n\to\infty}s^n=0$。夹逼。

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=b<1$，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$。

下面证：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$，

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{r^n}=r$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1$

$=\lim_{n\to\infty}b^n\cdot b_1=0$。

17. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3}=\frac{e}{3}<1$。

$\therefore \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}$，$a>1$。$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{n+1}{na}=\frac{1}{a}<1$。

18. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim_{n\to\infty}b_n=b$，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$。

$A=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot b+\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(b_n-b)+a_2(b_{n-1}-b)+\cdots+a_n(b_1-b)}{n}$

$b\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$　　$\le M\frac{|b_n-b|+|b_{n-1}-b|+\cdots+|b_1-b|}{n}$

$=b\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{1}=ab$。　　$=\frac{M}{n}\frac{|b_1-b|+\cdots+|b_n-b|}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cdots}{n}=0$

课堂

9.17

1. 试证：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$。

2. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+kn}$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$。

2. $a_n=\frac{1^2}{n^3+n}+\frac{2^2}{n^3+2n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}\le a_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$ → 取最小的

→ 取最大的。

$\therefore \frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^2(n+1)}\le a_n\le\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$。

$\therefore \underbrace{\frac{1}{6}\left(2+\frac{1}{n}\right)}_{b_n}\le a_n\le\underbrace{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}_{c_n}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}$，$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}$，$b_n\le a_n\le c_n$。

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$。

3. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

例 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$。

求证 $e_n<e_{n+1}<c_{n+1}<c_n$。

证明：$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1<\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e_{n+1}$。

$\frac{1}{c_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1<\left(\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)(n+1)+1}{n+2}\right)^{n+2}$

$=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{c_{n+1}}$。

9.18.

例. 尝试用 Cauchy 收敛准则讨论敛散性。

(1) $A_n=\frac{\cos 1}{1^2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}$。

(2) $B_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$　$(\alpha>1$，$0<\alpha\le 1)$

(3) $C_n=\alpha_0+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\cdots+\alpha_nq^n$

(其中 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列，$|q|<1$)。

(1) 取充分远时两项的差（柯西运用）。

$|A_{n+p}-A_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k}{k^2}\right|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|$

$\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\le\frac{1}{n}$。

(2) $|B_{n+p}-B_n|=\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^\alpha}$。

i) $0<\alpha\le 1$，取 $|B_{2n}-B_n|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}\ge\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$。

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ge\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$。

$\therefore$ 此时 B_n 发散。

ii) $\alpha>1$（用单调+有界证明）。

$B(2^{n+1}-1)=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{7^\alpha}\right)$ 分组。

$+\cdots+\frac{1}{(2^n)^\alpha}+\frac{1}{(2^n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}$

各组取最大值放缩。$\le 1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^n}{(2^n)^\alpha}$

$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}}$。

记 $p=\frac{1}{2^{\alpha-1}}$。$(0<p<1)$

$\therefore B(2^{n+1}-1)=1+p+p^2+\cdots+p^n$

$=\frac{1(1-p^{n+1})}{1-p}<\frac{1}{1-p}$。$n\in N^+$。

又 B_n 单调递增，$\therefore$ 收敛。

(3) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界，即 $\exists M$，对 $n\in N^+$，$|\alpha_n|\le M$。

$|C_{n+p}-C_n|=|\alpha_{n+1}q^{n+1}+\alpha_{n+2}q^{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}q^{n+p}|$

$\le Mq^{n+1}|1+q^2+\cdots+q^{p-1}|$

$=\frac{M|q|^{n+1}|1-q^p|}{1-q}<\frac{Mq^{n+1}}{1-|q|}$

$\lim_{n\to\infty}q^{n+1}=0$。$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{M}{1-q}|q^{n+1}|=0$。

例. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$。求

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$。

$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ↗ $+\infty$　　$b_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$ ↗ $+\infty$

$c_n=n$ ↗ $+\infty$　　$c_n=n^2$ ↗ $+\infty$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{1}=a$。　　$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2-n^2}=\frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1}$

由斯托尔兹，原式 $=a$。　　$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot a=\frac{a}{2}$。

正数列相比非常好。　　由 Stolz，原式 $=\frac{a}{2}$。

例. 设 $a_n>0$，$\lim_{n\to\infty}a_n=a$。求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$。

$a=0$，$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 夹 ⇒ 原式 $=0$

加权平均　　$\to 0$

$a>0$。$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

$\to a$。

$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}\to\frac{1}{\frac{1}{a}}$。

补充 ① $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

② $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$。

① 记 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\le\left(\frac{1+1+\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\left(\frac{n+1+n\cdot\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e_{n+1}$。

$\therefore$ 数列 $\{e_n\}$ 单增。

$\because \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$（定义），$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$。

$n<[n]+1\le n+1$。

$\frac{1}{n+1}+1\le\frac{1}{[n]+1}+1<\frac{1}{n}+1$

$\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^n<\left(\frac{1}{n}+1\right)^n<\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{n}+1\right)^n\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)$

$\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{n+1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{-1}}_{n\to\infty,\ \to 1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{n+1}<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}$

$\therefore e<\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}$。

② 这边建议构造函数求导。

要不就是微积分（但我只知道 $\ln n$）

③ ~~$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$~~　　不会！

~~$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$~~

~~$\frac{(n+1)^n}{n^n}<e<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$~~

记 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\le\left(\frac{1+1+\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\left(\frac{n+1+n\cdot\frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e_{n+1}$。

$\therefore$ 数列 $\{e_n\}$ 单增。

$\because \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$（定义），$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$。

记 $d_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，$\frac{1}{d_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\frac{1}{d_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<$ 反正要证 d_n 减 $\frac{1}{d_n}$ 增。

$n<n+1$，$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$。

$\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^n<\left(\frac{1}{n}+1\right)^n<\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{n}+1\right)^n\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)$

$\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{n+1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{-1}}_{n\to\infty,\ \to 1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{n+1}<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}$

即 $\lim_{n\to\infty}d_n=e$。

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$。

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

$\left(\frac{2}{1}\right)^1<e<\left(\frac{2}{1}\right)^2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2<e<\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdots$

$\Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<e<\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}}$

$\frac{n+1}{ne}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n}}}{ne}$

$\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{e}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{n+1}{n}(n+1)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{e}$

$\searrow 1$　　$\searrow 1$　　$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$

(三)(1) $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$。

求证：a_n 收敛。

$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$。$\ln\frac{2}{1}<1$，$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$ …

$\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

$\therefore \ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$。

$\therefore a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln n$

$=\ln\frac{n+1}{n}$。

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}<\frac{n}{n+n}$