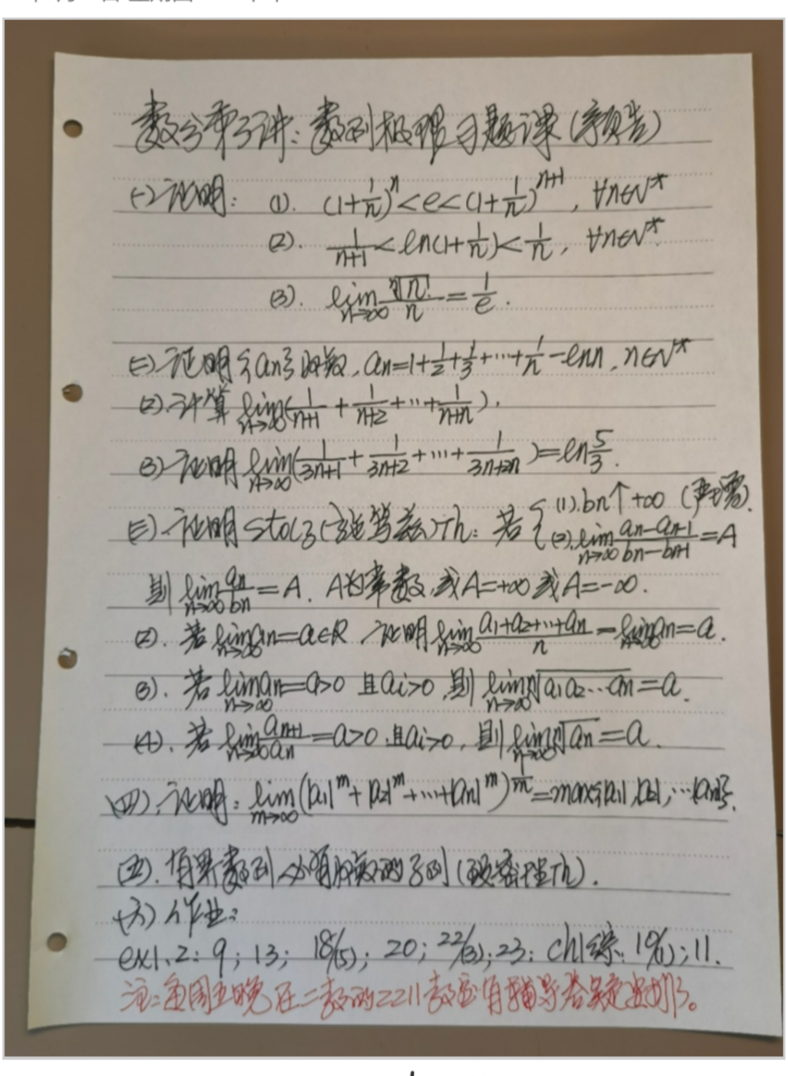
例题与结论

2021年9月17日 星期五　　下午6:01

2021917

2021/9/17

2021年9月16日 星期四　　下午7:30



数分第3讲：数列极限习题课（李勇）

(一) 证明：① $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，$\forall n\in N^*$

② $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，$\forall n\in N^*$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

(二) 证明 $\{a_n\}$ 收敛，$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，$n\in N^*$

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+2n})=\ln\frac{5}{3}$.

(三) 证明 Stolz（施笃兹）Th：若 (1) $b_n\uparrow+\infty$（严格），(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$. A为常数，或 $A=+\infty$ 或 $A=-\infty$.

(2). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in R$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(3). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ 且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

(4). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a>0$ 且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

(四) 证明：$\lim\limits_{m\to\infty}(|a_1|^m+|a_2|^m+\cdots+|a_n|^m)^{\frac{1}{m}}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$.

(五) ……

(六) 作业：

ex1.2: 9; 13; 18(5); 20; 22(3); 23; ch1 综 19(2); 11.

注：……

(一) (1) $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，$\forall n\in N^*$

令 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，$b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

由二项式展开，$\{a_n\}\nearrow$，$\{b_n\}\searrow$

$\{a_n\}$ 有上界 3，$\{b_n\}$ 有下界 0

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$

故 $a_n<e<b_n$，$\forall n\in N^*$

(2) $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，$\forall n\in N^*$

将(一)(1)取对数，有 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1<(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$

化简，有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

方法一（夹逼准则）

由 $(\frac{n+1}{n})^n<e<(\frac{n+1}{n})^{n+1}$

有
$$\begin{aligned}
(\tfrac{2}{1})^1&<e<(\tfrac{2}{1})^2\\
(\tfrac{3}{2})^2&<e<(\tfrac{3}{2})^3\\
(\tfrac{4}{3})^3&<e<(\tfrac{4}{3})^4\\
&\ \ \vdots\\
(\tfrac{n+1}{n})^n&<e<(\tfrac{n+1}{n})^{n+1}
\end{aligned}$$

不等式相乘，得 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

注意只有不等号同向且均为正时才可正常相乘

则 $\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<e<\frac{(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}}$

化简，得 $\frac{n+1}{n}\frac{1}{e}<\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}<\frac{n+1}{n}(1+n)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{e}$　往题目要求的式子上化

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}(1+n)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\times\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}$ *

* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$ 的证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^{\frac{1}{n+1}}]^{\frac{n+1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}1^{\frac{n+1}{n}}$　结论：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$=1$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

(二) 求证：$\{a_n\}$ 收敛，$a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$，$n\in N^*$

由 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$，有
$$\begin{aligned}
\ln\tfrac{2}{1}&<\tfrac{1}{1}\\
\ln\tfrac{3}{2}&<\tfrac{1}{2}\\
&\ \vdots\\
\ln\tfrac{n+1}{n}&<\tfrac{1}{n}
\end{aligned}$$

见(一)(2)

累加，得 $\ln(n+1)<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

故 $a_n>\ln(n+1)-\ln n>0$，$\{a_n\}$ 有下界　　收敛：有界+单调

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$ 恒成立，$\{a_n\}$ 单调减

见(一)(2)

故 $\{a_n\}$ 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\triangleq\gamma\approx0.5771\in R-Q$　欧拉常数 $\gamma\approx0.5771$

令 $a_n-\gamma=\alpha_n$，$n\to\infty$，α_n 为无穷小量，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

$a_n=\gamma+\alpha_n$，$n\to\infty$　　一个收敛的数列总可以表示成极限+无穷小量（$n\to\infty$时）

有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\alpha_n$ ☆☆☆

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\ln 2n+\gamma+\alpha_{2n})-(\ln n+\gamma+\alpha_n)]$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

$=\ln 2n-\ln n$

$=\ln 2$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+2n})$

$=\ln 5n-\ln 3n$

$=\ln\frac{5}{3}$

施笃兹定理

(三) (1) Stolz Th：若 $b_n\nearrow$ 且 $\to+\infty(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$，A为常数 or $+\infty$ or $-\infty$

仅对A为常数的情况进行证明

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，有对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in N^*$，当 $n\geq m$ 时，$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon$

有
$$\begin{aligned}
(A-\varepsilon)(b_m-b_{m-1})&<a_m-a_{m-1}<(A+\varepsilon)(b_m-b_{m-1})\\
(A-\varepsilon)(b_{m+1}-b_m)&<a_{m+1}-a_m<(A+\varepsilon)(b_{m+1}-b_m)\\
(A-\varepsilon)(b_{m+2}-b_{m+1})&<a_{m+2}-a_{m+1}<(A+\varepsilon)(b_{m+2}-b_{m+1})\\
&\ \ \vdots\\
(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})&<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})
\end{aligned}$$

累加，得 $(A-\varepsilon)(b_n-b_{m-1})<a_n-a_{m-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{m-1})$

$(A-\varepsilon)(b_n-b_{m-1})+a_{m-1}<a_n<(A+\varepsilon)(b_n-b_{m-1})+a_{m-1}$

$(A-\varepsilon)(1-\frac{b_{m-1}}{b_n})+\frac{a_{m-1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(A+\varepsilon)(1-\frac{b_{m-1}}{b})+\frac{a_{m-1}}{b_n}$

$\underbrace{\frac{a_{m-1}-b_{m-1}(A-\varepsilon)}{b_n}}_{②}-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<\underbrace{\frac{a_{m-1}-b_{m-1}(A+\varepsilon)}{b_n}}_{①}+\varepsilon$

化简方向：构造出 $X<\frac{a_n}{b_n}-A<Y$ 并使 X、Y 均为无穷小

①：$a_{m-1}-b_{m-1}(A+\varepsilon)$ 在 $n\to\infty$ 时为常数，$b_n\to+\infty(n\to\infty)$ 题目的条件

①式 $\to0$ $(n\to\infty)$

$\exists N_1>m$，当 $n>N_1$ 时，$\frac{a_{m-1}-b_{m-1}(A+\varepsilon)}{b_n}<\varepsilon$

$a_{m-1}-b_{m-1}(A-\varepsilon)$ 在 $n\to\infty$ 时为常数，$b_n\to+\infty(n\to\infty)$

$\exists N_2>N_1>m$，当 $n>N_2$ 时，$\frac{a_{m-1}-b_{m-1}(A-\varepsilon)}{b_n}>-\varepsilon$

故 $n>N_2$ 时，$-2\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<2\varepsilon$，对 $\forall\varepsilon>0$ 恒成立

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in R$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

令 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$B_n=n$

B_n 单调增，$B_n\to+\infty(n\to\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{1}=a$

由 Stolz Th，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=a$

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ 且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

* lim 符号可以和函数符号交换位置　如 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n}=e^{\ln a}=a$

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a>0$ 且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$

不妨设 $a_0=1$，a_0 的值不影响 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 的情况

*
(一) (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

方法二（Stolz Th）

令 $a_n=\frac{n^n}{n!}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=(\frac{n+1}{n})^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

由 Stolz Th，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{e}$

见(三)(4)

(四) 求证：$\lim\limits_{m\to\infty}(|a_1|^m+|a_2|^m+\cdots+|a_n|^m)^{\frac{1}{m}}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$

若 $\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}=0$，则 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，上式显然成立

设 $\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}=h>0$

$\underbrace{h}_{①}=(h^m)^{\frac{1}{m}}\leq(|a_1|^m+|a_2|^m+\cdots+|a_n|^m)^{\frac{1}{m}}\leq(nh^m)^{\frac{1}{m}}=\underbrace{h\times n^{\frac{1}{m}}}_{②}$

取等：$\{a_n\}$ 中有一项最大，其余均为0　　取等：$\{a_n\}$ 中各项一样大

①：$\lim\limits_{m\to\infty}h=h$

②：$\lim\limits_{m\to\infty}h\times n^{\frac{1}{m}}=h$

* $a^{\frac{1}{n}}\to1$，$n\to\infty$，$a>0$

由夹逼准则，$\lim\limits_{m\to\infty}(|a_1|^m+|a_2|^m+\cdots+|a_n|^m)^{\frac{1}{m}}=h=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}$