例题の重开 以及错题

2021年9月19日 星期日　　下午8:42

一、定义 & 夹逼

例①. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}\ (\alpha>0)$

例②. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$.

例③. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

1. $a_n=\frac{1^2}{n^3+n}+\frac{2^2}{n^3+2n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}$. 求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

2. 求证: $\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$, $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=a$ 时, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

3. 已知 $a\geq0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.
求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

4. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$, $c_n=\max\{a_n,b_n\}$,
求证: $\lim_{n\to\infty}c_n=\max\{a,b\}$.

5. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$.

6. 求证: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}$.

7. 求证: 若 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

8. 常数 $\alpha>0$, 令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}$, 试证 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\alpha}{2}$.

二、单调 + 有界

9.20✓ 1. 求 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$, $x_1>\sqrt{2}$ 极限.

9.21△ 2. 求 $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的极限.

9.21✓ 3. $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $c_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.
求证 $e_n<e_{n+1}<c_{n+1}<c_n$.

9.21 4. 利用 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, 求下列极限
✓(1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}$. △(2) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^n$.

9.21 5.✓(1) 求证: $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.
✓(2) 求证: $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.
△(3) 求证: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

6. 证明: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{A}{n})^n=e^A$.
(已知 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$)

7. 证明数列收敛并求其极限.
(1) $a_n=\frac{n}{c^n}\ (c>1)$.
(2) $a>0$, $a_0>0$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})$
(3) $a_n=\sin\sin\sin\cdots\sin 1$ (n个 $\sin$)

8. 常数 $0<q<1$. 令 $a_n=\prod_{k=1}^{n}(1+q^k)$, 试证数列 $\{a_n\}$ 收敛.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+q^{n+1}>1$. $a_{n+1}\uparrow$

$q<1$, $q^k\downarrow$

$a_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$

三、Cauchy

例 ①. $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

② $a_n=1+\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$

例. 尝试用 Cauchy 收敛准则讨论敛散性.
(1) $A_n=\frac{\cos 1}{1^2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}$.
(2) $B_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1$. $0<\alpha\leq1)$
(3) $C_n=\alpha_0+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\cdots+\alpha_nq^n$
(其中 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, $|q|<1$).

例. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $b_n>0$, 令 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$,
$B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$, 试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ 收敛.

四、Stolz

例 1. $0<x_1<1$, $x_{n+1}=(1-x_n)x_n$. 求证 $\lim_{n\to\infty}nx_n=1$.

例 2. 设 $\{2a_{n+1}+a_n\}$ 收敛于 a, 试证 $\{a_n\}$ 收敛.

例 3. 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 求:
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

2. 设 $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

3. 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 且 $a_n>0$, 求证: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

4. 用 Stolz 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

$\lim_{n\to\infty}(2a_{n+1}+a_n)=a$

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n>N$ 时, $|2a_{n+1}+a_n-a|<\varepsilon$.

$a_n-\frac{a}{3}=b_n$.

$|2b_{n+1}+b_n|<\varepsilon$.

五、其他结论 & 证明 & 题目

1. 求证: $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$ 收敛.

2. 求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

3. 设实数 $a_1,a_2\cdots a_n$ 有相同符号, 且都 >-1.
证明: $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq1+a_1+\cdots+a_n$.

4. 说明 $a_n=\sqrt[n]{n!}$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

5. 设 ξ 无理数, $a,b\in\mathbb{R}$.
求证: 存在整数 m,n 使 $m+n\xi\in(a,b)$.
即集合 $S=\{m+n\xi\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

一些注意点 & 补充

① 收敛数列 × 发散数列 → 可能发散/收敛.

② 对 $\forall p\in\mathbb{N}^+$, 都有 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)$ 的数列, 也可能发散. 如 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
(比较柯西收敛的表述: 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 对 $\forall p>0$, 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. ⇒ 基本列 ⟺ 收敛.)

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

下界: $>\frac{1}{2}$.

上界: 原式 $=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}>\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})}+\frac{1}{(3-\frac{1}{2})(4+\frac{1}{2})}+\cdots$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{\frac{5}{2}}}+\cdots\frac{1}{\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{3}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<2$

收敛: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$.
$<1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n})$

$=\ln 2n+\cancel{\gamma}+\cancel{\varepsilon(2n)}-(\ln n+\cancel{\gamma}+\cancel{\varepsilon(2n)})$

$=\ln 2$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时, $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

否: $\exists\varepsilon>0$, 对 $\forall N$, $\exists m,n>N$, 使 $|a_m-a_n|\geq\varepsilon$.
取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 对 $\forall N$. 取 $m=2n$, $m,n>N$.
有 $|a_m-a_n|=|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}|$
$>|\frac{n}{2n}|=\frac{1}{2}=\varepsilon$. 发散.

③ Toeplitz 引理: 设 $n,k\in\mathbb{N}$, $t_{nk}\geq0$, 且 $\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1$.
$\lim_{n\to\infty}t_{nk}=0$, 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时, $|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2}$ $|a_k-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.
对 $\forall M>0$, $\exists n>0$, 使 $|a_n-a|<\varepsilon$
$\therefore|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a|=|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a|=|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}(a_k-a)|$
$\leq\sum_{k=1}^{n}t_{nk}|a_k-a|$
$\leq\sum_{k=1}^{N_1}t_{nk}|a_k-a|+\sum_{N_1+1}^{n}t_{nk}|a_k-a|$
$\leq M\cdot N_1\cdot\frac{\varepsilon}{2N_1M}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot1=\varepsilon$.

例①. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}\ (\alpha>0)$
$\sqrt{1+x}<1+x\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}<1+\frac{1}{n^\alpha}$.
$\therefore1<\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}<1+\frac{1}{n^\alpha}$ 夹逼.
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$, $\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}=1$.

例②. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$.
当 $a=1$ 时, $\sqrt[n]{a}=1$.
当 $a>1$ 时, $\sqrt[n]{a}>1$, 设 $\sqrt[n]{a}=1+\lambda_n$.
$\therefore a=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots>1+n\lambda_n$
$\therefore\lambda_n<\frac{a-1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$, $\lambda_n\to0$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.
/ $a>1$ 时, $\exists$ 正整数 $n\geq a$,
则有 $1<\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{n}$. → 夹逼.
$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.
当 $0<a<1$ 时, 有 $\frac{1}{a}>1$, $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$.

例③. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.
S1. 设 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$, $n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots$
取 $n>1+n\lambda_n$, 则 $\lambda_n<\frac{n-1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.
取 $n>1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$, 则 $\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}=0$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.
S2. $\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot1\cdot1\cdots}\leq\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}+1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}=0$, $\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. $1<\sqrt[n]{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{n-2}{n}$.
$\because\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{n-2}{n})=1$,
由夹逼可得 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

1. $a_n=\frac{1^2}{n^3+n}+\frac{2^2}{n^3+2n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}$ 求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.
$1^2+\cdots+n^2$ 求和
$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}\leq a_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$ → 取最大的 → 取最小的
$\therefore\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^2(n+1)}\leq a_n\leq\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$
$\therefore\underbrace{\frac{1}{6}(2+\frac{1}{n})}_{b_n}\leq a_n\leq\underbrace{\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}_{c_n}$.
$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}$, $b_n\leq a_n\leq c_n$
$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

2. 求证: $\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$, $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=a$ 时, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.
$\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K_1$, $k>K_1$ 时, $|a_{2k+1}-a|<\varepsilon$.
$\exists K_2$, $k>K_2$ 时, $|a_{2k}-a|<\varepsilon$.
取 $N=2\max\{K_1,K_2\}+1$
则 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$

3. 已知 $a\geq0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.
求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.
$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}$
$a\geq0$ 分类
$a=0$. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n>N$ 时, $|a_n-a|=|a_n|<\varepsilon^2$. $\therefore\sqrt{a_n}<\varepsilon$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0=\sqrt{a}$.
$a>0$. $\frac{|a_n-a|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon$.

4. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$, $c_n=\max\{a_n,b_n\}$,
求证: $\lim_{n\to\infty}c_n=\max\{a,b\}$.
i) 若 $a>b$, 由保序性, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时,
有 $a_n>b_n$, $\therefore$ 此时 $c_n=a_n$.
$\because\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时,
有 $|a_n-a|<\varepsilon$.
$\therefore$ 当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时,
有 $|c_n-\max\{a,b\}|=|c_n-a|<\varepsilon$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}c_n=a=\max\{a,b\}$.
ii) 若 $a<b$, 同理.
iii) 若 $a=b$, 即 $\max\{a,b\}=a=b$.
$\because\lim_{n\to\infty}b_n=b$, $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_3$, 当 $n>N_3$ 时,
有 $|b_n-b|<\varepsilon$.
$\therefore$ 当 $n>\max\{N_2,N_3\}$ 时,
有 $|c_n-\max\{a,b\}|=|\max\{a_n,b_n\}-a|$
$=\max\{|a_n-a|,|b_n-b|\}$.
其中一个为0时取等号. $\leq|a_n-a|+|b_n-b|\leq2\varepsilon$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}c_n=\max\{a,b\}$

5. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$.
$\sqrt[n]{\cos^2 1}\leq\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\leq\sqrt[n]{1+1+1+\cdots+1}=\sqrt[n]{n}$
特殊型
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　$\lim=1$.　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

6. 求证: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2\cdots a_m\}$.
设 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}$.
$a^n=\max\{a_1^n,a_2^n,\cdots a_m^n\}$.
$na^n\geq a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n$.
$\sqrt[n]{n}a\geq\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}$　直接上定义
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, $|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{\varepsilon}{a}$.
$\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}-a\leq\sqrt[n]{n}a-a=(\sqrt[n]{n}-1)a<\varepsilon$.

7. 求证: 若 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
$a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{l}<1$.
取 $\varepsilon=\frac{1-\frac{1}{l}}{2}>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,
使得 $|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{1}{l}|<\frac{1-\frac{1}{l}}{2}$
$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1-\frac{1}{l}}{2}+\frac{1}{l}=\frac{1+\frac{1}{l}}{2}\triangleq c<1$
当 $n>N$ 时, a_n 单减, 且 $a_n>0$, $\therefore$ 收敛.
设 $a_n\to a$, $\because0<a_{n+1}<c\cdot a_n$, 有 $0\leq a\leq c\cdot a$.
$\because0<c<1$, $\therefore a=0$.

8. 常数 $\alpha>0$, 令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}$, 试证 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\alpha}{2}$.
而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n\alpha}{2n^2}=\frac{(n+1)\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2}$.
记 $y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\alpha}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{\alpha}{2}=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)$.
故只需证: $\lim_{n\to\infty}\frac{k\alpha}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\sin\frac{k\alpha}{n^2}=0$
当整数 $n>\alpha$ 时, $0<\frac{k\alpha}{n^2}<\frac{\alpha}{n}<1$. 估算.
$\therefore y_n-x_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k\alpha}{n^2}-\sin\frac{k\alpha}{n^2})\leq n(\frac{n\alpha}{n^2}-\sin\frac{n\alpha}{n^2})$.
$=\alpha-n\sin\frac{\alpha}{n}$.
$\therefore0<y_n-x_n<\alpha-n\sin\frac{\alpha}{n}\to0$, $\therefore\lim_{n\to\infty}|y_n-x_n|=0$.

例①. 求 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$, $x_1>\sqrt{2}$ 极限.
1) 单调: $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(\frac{2}{x_n}-x_n)=\frac{2-x_n^2}{2x_n}$.
$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})>\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.
$\therefore x_{n+1}-x_n<0$, x_n 单减.
2) 有界: $\sqrt{2}<x_n\leq x_1$.
3) 收敛: $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{2}{x_n}$, $2x_{n+1}x_n=x_n^2+2$
$x^2=2$, $x=\sqrt{2}$, $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

例②. 求 $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的极限.
1) 单调: $e_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}$
$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$.
$e_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=1+1+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$
$=1+1+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{1}{n+1})>e_n$.
$e_n=1(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots$
$\leq(\frac{1+1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}}{n+1})^{n+1}$
$=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=e_{n+1}$
2) 有界: $e_n<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$
$=2+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})<3$.
3) 收敛: 记 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

例 $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$. $c_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.
求证 $e_n<e_{n+1}<c_{n+1}<c_n$.
证明: $e_n=(1+\frac{1}{n})^n\cdot1<(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1})^{n+1}$
$=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=e_{n+1}$.
$\frac{1}{c_n}=(\frac{n}{n+1})^{n+1}\cdot1<(\frac{(\frac{n}{n+1})(n+1)+1}{n+2})^{n+2}$
$=(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}=\frac{1}{c_{n+1}}$.
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})=e$.
即 $\lim_{n\to\infty}e_n=\lim_{n\to\infty}c_n=e$. $\therefore e_n<e_{n+1}<e<c_{n+1}<c_n$

例 利用 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, 求下列极限
(1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}$. (2) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^n$.
(1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{(-n)})^{(-n)}$
$=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^{-n}=(\frac{n}{n-1})^n=(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})$
$\to e\cdot1=e$.
(2) $(1+\frac{n}{n^2+n})^n<(1+\frac{n}{n^2+1})^n<(1+\frac{n}{n^2})^n$
$(1+\frac{1}{n+1})^n=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1}<(1+\frac{n}{n^2+1})^n<(1+\frac{1}{n})^n$
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=e$. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^n=e$.

5. (1) $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$
令 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$
由二项式展开, $\{a_n\}\uparrow$, $\{b_n\}\downarrow$
$\{a_n\}$ 有上界 3, $\{b_n\}$ 有下界。
且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=e$
故 $a_n<e<b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

(2) $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$
将(一)(1)取对数, 有 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1<(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$
化简, 有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$
方法一 (夹逼准则)
由 $(\frac{n+1}{n})^n<e<(\frac{n+1}{n})^{n+1}$
有 $(\frac{2}{1})^1<e<(\frac{2}{1})^2$
$(\frac{3}{2})^2<e<(\frac{3}{2})^3$
$(\frac{4}{3})^3<e<(\frac{4}{3})^4$
$\vdots$
$(\frac{n+1}{n})^n<e<(\frac{n+1}{n})^{n+1}$
不等式相乘, 得 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$
注意不等号同向且均为正时才可正常相乘
则 $\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}<e<\frac{(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}}$
往题目要求的式子上化
化简, 得 $\frac{n+1}{n}\frac{1}{e}<\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}<\frac{n+1}{n}(1+n)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{e}$
注意到 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$
$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}(1+n)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\times\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}$ *
由夹逼准则, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$
* $\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$ 的证明:
$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}[(1+n)^{\frac{1}{n+1}}]^{\frac{n+1}{n}}$
$=\lim_{n\to\infty}1^{\frac{n+1}{n}}$ 结论: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
$=1$

(二) 三个重要极限:
1. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\approx2.718$, $n\in\mathbb{N}^*$
⇒ $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$, $x\in\mathbb{R}$
证明: 设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n\in\mathbb{N}^*$
$(a_n\times1)^{\frac{1}{n+1}}=[(1+\frac{1}{n})\times(1+\frac{1}{n})\times\cdots\times1]^{\frac{1}{n+1}}\leq\frac{1+\frac{1}{n}+\cdots+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$
⇒ $a_n\leq(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=a_{n+1}$
且 $a_n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2(\frac{1}{n})^2+\cdots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$　$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$　$=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\cdots$
$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\frac{1}{4!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})+\cdots$
$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$
$<2+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$
$=3-\frac{1}{n}$
<3
由单调有界极限存在准则, $\{a_n\}$ 收敛有极限
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$　$\log_e x\triangleq\ln x$　$\log_{10}x=\lg x$　$e\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
证明 2: ($\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$)
对于 $\forall x>1$, 总有 $n\in\mathbb{N}^*$, 使 $n\leq x<n+1$
$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$ ⇒ $(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}$
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}=e\times1=e$
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\times\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e\times1=e$
由夹逼准则, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$, 又由 $n\to\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$, 故 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
证明 3: ($\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$)
令 $y=-x$, 则 $y>0$ 且 $y\to+\infty$
$\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y}=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}\times(1+\frac{1}{y-1})=e\times1=e$
用到证明1的结论
补充: $(\frac{\sum x^{-1}}{n})^{-1}\leq\sqrt[n]{\prod x}\leq\frac{\sum x}{n}\leq\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$
H ≤ G ≤ A ≤ RMS

6. 证明: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{A}{n})^n=e^A$.
(已知 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$)

7. 求证下列数列收敛并取极限.
(1) $a_n=\frac{n}{c^n}\ (c>1)$.
S1. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{cn}$, $n>\frac{1}{c-1}$ 时 $\{a_n\}$ 单减.
即 $\{a_n\}$ 先单调递增后单减.
又 $a_n>0$, $\therefore\{a_n\}$ 有上下界. $\therefore a_n$ 收敛.
$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n-c^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c-1}\times\frac{1}{c^{n-1}}=0$
S2. 设 $c=1+h$, $c^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2>\frac{n(n-1)}{2}h^2$.
$\therefore a_n=\frac{n}{c^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}$.
$\because a_n>0$, 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h^2}\times\frac{2}{n-1}=0$, $\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
(2) $a_n>0$, $a>0$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})$.
$a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\geq\frac{1}{2}\times2\sqrt{a}=\sqrt{a}$. 下界, 但非下确界.
$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(\frac{a}{a_n}-a_n)<0$, 单减. $\therefore$ 收敛.
设 $\lim_{n\to\infty}a_n=x$, 两边取极限,
有 $x=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$, 则 $x=\sqrt{a}$ (负值舍).
(3) $a_n=\sin(\sin(\sin\cdots(\sin1)))$ (n个 $\sin$)
$\because x>0$ 时, 有 $0<\sin x<x$.
$\therefore a_{n+1}=\sin a_n<a_n$, $a_1=1$.
又 a_n 单减, $a_n>0$ 有下界, $\therefore a_n$ 收敛.
对 $a_{n+1}=\sin a_n$ 两边取极限,
有 $a=\sin a$, 解得 $a=0$.

8. 常数 $0<q<1$. 令 $a_n=\prod_{k=1}^{n}(1+q^k)$, 试证数列 $\{a_n\}$ 收敛.
[关注: a_n 乘积, $(1+q^k)>1>0$, a_n 单增]
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+q^{n+1}>1$, $\therefore a_n$ 单增. [只需证有界].
放缩 $a_n\leq(\frac{1+q+1+q^2+\cdots+1+q^n}{n})^n=(1+\frac{q}{n}\frac{(1-q^n)}{1-q})^n<(1+\frac{q}{n(1-q)})^n$
关注形式
$b_n=(1+\frac{1}{n}\frac{q}{1-q})^n=[(1+\frac{1}{n}\frac{q}{1-q})^{n\cdot\frac{1-q}{q}}]^{\frac{q}{1-q}}<e^{\frac{q}{1-q}}$.
$\therefore a_n$ 有上界. $\therefore$ 收敛.

例① $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.
[对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$, 当 $n,n+p>N$, 都有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.
$a_{n+p}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}$ 假设收敛]
取 $p=n$, 则 $a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$
放缩 $>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}$
$=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$.
$\therefore$ 取 $\varepsilon<\frac{1}{2}$, 对 $\forall n$, 当 $p=n$ 时,
有 $|a_{n+p}-a_n|=|a_{2n}-a_n|>\frac{1}{2}>\varepsilon$.
$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 不收敛 (发散).

例② $a_n=\frac{\sin1}{1^2}+\frac{\sin2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$.
$a_{n+p}-a_n=\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}$
放缩 $\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$
放缩 $<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$
$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$
$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$
$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时,
有 $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon$. 收敛.

例. 尝试用 Cauchy 收敛准则讨论敛散性.
(1) $A_n=\frac{\cos1}{1^2}+\frac{\cos2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}$.
(2) $B_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1$. $0<\alpha\leq1)$
(3) $C_n=\alpha_0+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\cdots+\alpha_nq^n$
(其中 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, $|q|<1$).
(1) 取 充分远 时两项的差 (柯西运用).
$|A_{n+p}-A_n|=|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k}{k^2}|=|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}|$
$\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\leq\frac{1}{n}$.
(2) $|B_{n+p}-B_n|=\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^\alpha}$.
i) $0<\alpha\leq1$, 取 $|B_{2n}-B_n|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.
$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$.
$\therefore$ ~~此时~~ B_n 发散.
ii) $\alpha>1$ (用单调+有界证明).
$B(2^{n+1}-1)=1+(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha})+(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{7^\alpha})$ 分组.
$+\cdots+\frac{1}{(2^n)^\alpha}+\frac{1}{(2^n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}$
在组内取最大值放缩. $\leq1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^n}{(2^n)^\alpha}$
$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}}$.
记 $p=\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. $(0<p<1)$
$\therefore B(2^{n+1}-1)=1+p+p^2+\cdots+p^n$
$=\frac{1\cdot(1-p^{n+1})}{1-p}<\frac{1}{1-p}$. $n\in\mathbb{N}^+$.
又 B_n 单调递增, $\therefore$ 收敛.
(3) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界, 即 $\exists M$, 对 $n\in\mathbb{N}^+$, $|\alpha_n|\leq M$.
$|C_{n+p}-C_n|=|\alpha_{n+1}q^{n+1}+\alpha_{n+2}q^{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}q^{n+p}|$
$\leq Mq^{n+1}|1+q^2+\cdots+q^{p-1}|$
$=\frac{M|q^{n+1}|(1-q^p)}{1-q}<\frac{Mq^{n+1}}{1-|q|}$
$\lim_{n\to\infty}q^{n+1}=0$. $\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{M}{1-q}|q^{n+1}|=0$.

例. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $b_n>0$, 令 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$,
$B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$, 试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ 收敛.
① 若 B_n 发散到 $+\infty$, $\because b_n>0$, $\therefore B_n$ 严格单增
则 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a$.
② 若 B_n 收敛, 此时只需证 A_n 收敛.
$\because\{a_n\}$ 收敛, $\therefore\exists M$, 使得 $|a_n|<M$.
$|B_{n+p}-B_n|=|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{M}$
$\therefore|A_{n+p}-A_n|=|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|$
$<M|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|<\varepsilon$.

例 1. $0<x_1<1$, $x_{n+1}=(1-x_n)x_n$. 求证 $\lim_{n\to\infty}nx_n=1$.
① $x_{n+1}-x_n=-x_n^2<0$, $\therefore\{x_n\}$ 单减. → 单调
$x_1\in(0,1)$. 假设 $x_n\in(0,1)$,
则 $x_{n+1}=(1-x_n)x_n>0$,
$x_{n+1}=(1-x_n)x_n<(\frac{1-x_n+x_n}{2})^2<1$.
$\therefore x_n\in(0,1)$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 成立. → 有界.
$\therefore\{x_n\}$ 收敛. 设 $x_n\to x$.
则有 $x=(1-x)x$, $x=0$. $\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=0$.
② 对 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{-1}}{n}$,
$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-(1-x_n)x_n}{x_n^2(1-x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}=1$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}nx_n=1$.

例 2. 设 $\{2a_{n+1}+a_n\}$ 收敛于 a, 试证 $\{a_n\}$ 收敛.
[$\lim_{n\to\infty}2a_{n+1}+a_n=a$, 猜测 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{a}{3}$].
令 $b_n=a_n-\frac{a}{3}$, 则 $2a_{n+1}+a_n=2b_{n+1}+b_n+a$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}2b_{n+1}+b_n=\lim_{n\to\infty}2a_{n+1}+a_n-a=0$.
$\therefore n$ 足够大时, 有 $2b_{n+1}=-b_n$.
$\lim_{n\to\infty}(-1)^nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n2^nb_n}{2^n}$ 凑比值. 2和1.
$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}b_{n+1}-(-1)^n2^nb_n}{2^{n+1}-2^n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}b_{n+1}-(-2)^nb_n}{2^n}$
$=\lim_{n\to\infty}(-2b_{n+1}-b_n)(-1)^n=0$.
数列 $(-1)^n$ ~~发散~~, $\therefore\{b_n\}$ 收敛, 且 $b_n\to0$.
$\therefore a_n=b_n+\frac{a}{3}$ 收敛, 且 $a_n\to\frac{a}{3}$.

例 3. 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$
令 $a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$, $b_n=n^{k+1}$
$\therefore$ 原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k(1+\frac{1}{n})^k}{\sum_{i=0}^{k}C_{k+1}^in^i}=\frac{1}{k+1}$.

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 求:
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.
$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 不定
$c_n=n$ 严 $\nearrow+\infty$
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{1}=a$.
由 Stolz 可, 原式 $=a$.
$b_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$ 不定
$c_n=n^2$ 严 $\nearrow+\infty$
$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2-n^2}=\frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot a=\frac{a}{2}$.
数列的极限相等.　由 Stolz, 原式 $=\frac{a}{2}$.

2. 设 $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
证明: S1. $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. 调和　夹.
需讨论 $a_n>0/a_n=0$
$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_n}}=a$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
S2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}$
$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\ln a_n}$ Stolz
$=e^{\ln a}=a$.

3. 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 且 $a_n>0$, 求证: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 下结论.
不妨设 $a_0=1$. 改了有限项不影响极限.

4. 用 Stolz 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.
设 $a_n=\frac{n!}{n^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}$
$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}$.
$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e}$.

S2. $\because\lim_{n\to\infty}a_n=a$. $\therefore\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 对 $\forall n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$　$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$
$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}$
$=\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}$
$\frac{(a-\varepsilon)(n-N)}{n}<\cdots<\frac{(a+\varepsilon)(n-N)}{n}$

---

1. 求证: $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$ 收敛.
$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(\frac{n+1}{n})<\frac{1}{n}$.
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}<\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i+1}{i}=\ln(n+1)<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.
$\therefore a_n>\ln(n+1)-\ln n>0$. 有下界.
$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0$
$\therefore a_n$ 单调递减.
$\lim_{n\to\infty}a_n\triangleq\gamma\approx0.5771\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 欧拉常数.
令 $a_n-\gamma=\alpha_n$, $n\to\infty$, α_n 为无穷小量.
即收敛数列 $a_n=\gamma+\alpha_n$ (极限+无穷小量).
☆ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\alpha_n$.

2. 求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$
原式 $=\ln2n+\gamma+\alpha_n-\ln n+\gamma+\alpha_n=\ln2$

3. 设实数 $a_1,a_2\cdots a_n$ 有相同符号, 且都 >-1.
证明: $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq1+a_1+\cdots+a_n$.
S1 $n=1$ 时, $1+a_1\geq1+a_1$ 成立.
$n\geq2$ 时, 假设 $n=k$ 时原不等式成立,
即 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geq1+a_1+\cdots+a_k$,
则 $n=k+1$ 时, 有
$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$
$\geq(1+a_1+\cdots+a_k)(1+a_{k+1})$
$=1+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+1}(a_1+\cdots+a_k)$
$\because a_1,a_2\cdots a_n$ 符号相同,
$\therefore$ 原式 $\geq1+a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$,
即 $n=k+1$ 时原不等式成立.
综上, 原命题成立
S2. $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)$
$>(1+a_1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)$
$>(1+a_1+a_2+a_3)\cdots(1+a_n)$
$>\cdots>1+a_1+a_2+\cdots+a_n$

4. 说明 $a_n=\sqrt[n]{n!}$ 是否有界, 是否趋于无穷大.
S1: $a_n=\sqrt[n]{n(n-1)\cdots1}\geq\frac{n}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1}=b_n$.
$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$, 无界.
又 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$, $\therefore a_n$ 趋于无穷大.
S2: $a_n^2=\sqrt[n]{n!}\times\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{n\times1\times(n-1)\times2\times\cdots\times2(n-1)\times1\times n}$
$\geq\sqrt[n]{(n\times1)^n}=n$　(靠中间).

5. 设 ξ 无理数, $a,b\in\mathbb{R}$.
求证: 存在整数 m,n 使 $m+n\xi\in(a,b)$.
即集合 $S=\{m+n\xi\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
实数集 S 稠密: S 与任意非空开子集 (a,b) 的交集非空. [(a,b) 可任意小, 任意远].
① 递归构造无理数列 x_n, 满足:
$x_0=\xi-[\xi]\in(0,1)$, $x_{n+1}=1-[\frac{1}{x_n}]x_n$.
无 − 有 = 无.　x_n 0 (取整) 1 x_{n+1} 无理.
则有 (1) $\{x_n\}$ 单减且 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$:
$[\frac{1}{x_n}]\leq\frac{1}{x_n}<[\frac{1}{x_n}]+1$, $\therefore x_n([\frac{1}{x_n}]+1)>1$.
$\therefore x_{n+1}-x_n=1-[\frac{1}{x_n}]x_n-x_n<0$.
(2) $\{[\frac{1}{x_n}]\}$ 单增且 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{x_n}]=+\infty$:
$[\frac{1}{x_n}]x_n+x_{n+1}=1$
$[\frac{1}{x_n}]x_{n+1}+x_{n+1}<1$
$\frac{1}{x_{n+1}}>[\frac{1}{x_n}]+1$
$[\frac{1}{x_{n+1}}]\geq[\frac{1}{x_n}]+1$
$[\frac{1}{x_n}]=\frac{1-x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{x_{n+1}}{x_n}$
$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{x_n}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x_{n+1}}{x_n}=+\infty$.
② 对实数集 S, 有
(1) 对 $\forall x,y\in S$, $k\in\mathbb{Z}$, 有 $x\pm y\in S$, $kx\in S$.
(2) $x_0=\xi-[\xi]=1\times\xi-m\in S$.
假设 $x_n=l+m\xi\in S$,
则 $x_{n+1}=1-[\frac{1}{l+m\xi}](l+m\xi)$
$=1-kl-km\xi\in S$.
则归纳可得对 $\forall n$, 都有 $x_n\in S$.
③ $\therefore x_n\in(0,1)\cap S$, $n=0,1,2\cdots$
$\because\lim_{n\to\infty}x_n=0$, $\therefore$ 对 $\forall a<b$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时,
有 $0<x_n<b-a$.
$\therefore\exists k\in\mathbb{Z}$, 使对 $\forall a<b$, 有 $a<kx_n<b$.
$\therefore$ 对 $\forall(a,b)$, $\exists kx_n\in(a,b)\cap S$, 即 S 稠密.