知识点&证明

2022年5月25日 星期三　　下午6:04

1. 反常积分

① 比较　$0 \le f(x) \le g(x)$

比值　$\frac{f(x)}{g(x)} = $ —.

条件 & 绝对.　绝对 ⇒ 条件.

② 第二积分平均值引理.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且单调递减，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

对 $[a,b]$ 作分割 T: $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx$

$= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]\,dx$

记 $g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 振幅为 w_i，

则 $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x)-g(x_{i-1})]\,dx \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x)-g(x_{i-1})|\,dx$

$\le \sum_{i=1}^n w_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\,dx \le \sum_{i=1}^n w_i K \Delta x_i$

$g(x)$ 可积，$\lim_{\|T\|\to 0} K\sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i = 0$.

$\therefore \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$.

记 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$，则 $F(x_k) = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt$

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，有最值 $m \le F(x) \le M$.

$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})]$

$= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_{i-1})$

$= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)F(x_i)$

$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + g(x_{n-1})F(b)$

$\le \left(\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + g(x_{n-1})\right)\cdot M = g(a)M$

$\ge \left(\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + g(x_{n-1})\right)\cdot m = g(a)m$.

$m\cdot g(a) \le \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le M\cdot g(a)$.

$\|T\| \to 0$，$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{g(a)} \le M$.

$\exists \xi \in [a,b]$，使 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{g(a)} = F(\xi)$.

③ Dirichlet　积分有界 + 函数单调 → 0

Abel.　积分收敛 + 函数单调有界.

2. 含参变量积分

> $\varphi(u) = \int_a^b f(x,u)\,dx$.

连续：$f(x,u)$ 连续，$\varphi(u)$ 连续.

可微：$\varphi'(u) = \frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx$

积分：$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,u)\,dx\,du$

$= \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx$.

> $\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$

连续：$f(x,u)$、$a(u)$、$b(u)$ 连续，$\psi(u)$ 连续.

微分：$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx + f(b(u),u)\,b'(u) - f(a(u),u)\,a'(u)$.

$F(u,y,z) = \int_y^z f(x,u)\,dx$.

$\frac{\partial F}{\partial u} = F'_u + F'_y y'_u + F'_z z'_u$

$= \int_y^z \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx - f(y,u)y'_u + f(z,u)z'_u$

$= \int_y^z \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx + f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u)$

3. 含参变量反常积分.

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$.

(1) 收敛性

① 逐点收敛：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > a$，当 $A > X$ 时，

有 $\left|\int_a^A f(x,u)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|$

$= \left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon$.

② 一致收敛：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > a$，当 $A > X$ 时，

$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon$ 对 $\forall u \in (\alpha,\beta)$

(2) 判别法.

① Cauchy.

对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X$，当 $A', A'' > X$ 时，

有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon$，对 $\forall u \in [\alpha,\beta]$ 成立.

则 $\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 一致收敛.

② Weierstrass 控制收敛.

$|f(x,u)| < p(x)$，且 $p(x)$ 可积.

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 一致收敛.

③ Dirichlet　$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,dx$

$\int_a^b f(x,u)\,dx$ 对 $b \ge a$, $u \in J$ 一致有界.

$g(x,u)$ 对 $\forall u \in J$，$g(x,u)$ 单调 → 0.

④ Abel.

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 u 一致收敛.

$g(x,u)$ 对 $\forall u \in J$ 单调一致有界.

(3) 性质.

① $f(x,u)$ 在 $I = [a,+\infty)\times J$ 上连续，

积分 $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 u 一致收敛，

则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

② $f(x,u)$ 在 $I = [a,+\infty)\times J$ 上连续，

$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 u 一致收敛，

则 $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_\alpha^\beta \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx\,du$

$= \int_a^{+\infty}\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx$.

☆ $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 连续，

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 x. u 一致收敛.

$\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\,du$. $\int_\alpha^{+\infty}du\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\,dx$ 至少存在一个.

则 $\int_a^{+\infty}dx\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\,du = \int_\alpha^{+\infty}du\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$

③ $f(x,u)$、$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 连续.

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 收敛.

$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

则 $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可微.

$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 函数项级数.

(1) 收敛性

① 逐点收敛：对每个 $x_0 \in I$，$f_n(x_0)$ 有 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

② 一致收敛：对 $\forall \varepsilon > 0$，所有 $x \in I$，

$f_n(x)$ 都满足 $\forall \varepsilon > 0$, …… $< \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$.

2、判别法

① Cauchy

对 $\forall x \in I$，都有 $f_n(x)$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，

当 $n > N$ 时，对 $\forall p > 0$，$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

则 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 一致收敛.

② Weierstrass 控制收敛.

$|u_n(x)| < a_n \,/\, a_n(x)$

$\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ 一致收敛.

③ Dirichlet.

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)v_n(x)$，$\{v_n(x)\}$ 单调且一致趋于零.

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 一致有界.

④ Abel.

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)v_n(x)$，$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 一致收敛，

$v_n(x)$ 单调且一致有界.

3. 性质

① $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在 $x \in I$ 一致连续，$u_n(x)$ 连续，

则 $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \lim_{x\to x_0} u_n(x)$. $\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$

② $u_n(x)$ 可导 (C^1)，$\sum_{n=1}^\infty u_n'(x)$ 一致收敛，

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^\infty u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right)'$ (C^1).

③ $u_n(x)$ 连续可积，$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 积.

$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^\infty u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b u_n(x)\,dx$.

4. 重要例.

① Dirichlet 积分.

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\,dx$

$u > 0$，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 收敛，e^{-ux} 单减 → 0.

$I(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\,dx$.　一致收敛.

$I'(u) = \int_0^{+\infty} -x e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_0^{+\infty} e^{-ux}\sin x\,dx$

$= -\frac{1}{u^2+1} = -\arctan u + c$

$\int_0^{+\infty} e^{-ux}e^{-ix}\,dx = -\frac{1}{u+i}e^{-(u+i)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{u+i} = \frac{u-i}{u^2+1}$

$u \to +\infty$，$I(u) \to 0$　$c = \frac{\pi}{2}$.

$I(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan u$.

$I(0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

② Laplace 积分.

$I(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$

$J(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$.

$\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2} \le \frac{1}{\alpha^2+x^2}$.　$\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 单减 → 0，$\int_0^{+\infty}\sin\beta x\,dx \le \frac{1}{\beta_0}$.

$I(\beta)$ 一致收敛，$I'(\beta) = J(\beta)$ 一致收敛.

$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{\beta x}\,d\beta x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$.

$I'(\beta) + \frac{\pi}{2} = -\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$

$= \int_0^{+\infty}\frac{-x^2\sin\beta x + (\alpha^2+x^2)\sin\beta x}{(\alpha^2+x^2)x}\,dx$

$= \int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}\,dx$

$I''(\beta) = \alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx = \alpha^2 I(\beta)$.

$I(\beta) = c_1 e^{\alpha\beta} + c_2 e^{-\alpha\beta}$　收敛，$c_1 = 0$.

$I(0) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha} = c_2$.

$\therefore I(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$.

5. Euler 积分.

> $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$

① $\Gamma(s)$ 定义域 $s > 0$，Γ 连续.

$\Gamma(s) = \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$.　对 $\forall 0 < \alpha < \beta$，取 $\alpha \le s \le \beta$.

$0\sim 1$，$s-1 > -1$ 时，$\int_0^1 t^{s-1}\,dt$ 收敛.

$t^{s-1}e^{-t} \le t^{\alpha-1}e^{-t}$.　$\alpha \le s \le \beta$.

$1\sim +\infty$，$\alpha \le s \le \beta$.　$t^{s-1}e^{-t} \le t^{\beta-1}e^{-t}$.　一致收敛.

$s \in \forall [\alpha,\beta]$ 收敛 ⇒ $s \in (0,+\infty)$

② Γ 有任意阶导数 $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$

$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty}\ln t\; t^{s-1}e^{-t}\,dt$

$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}\,dt$.

能够任意阶求导，任意阶收敛.

$\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty}(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}\,dt$.

$\alpha \le s \le \beta$. $t \in (0,1)$　$t \to 0$，$(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t} \le (\ln t)^k t^{\alpha-1}e^{-t}$.

$|(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}| \le (-1)^k t^{\alpha-1}e^{-t}(\ln t)^k$.

$t \in (1,+\infty)$，$t \to +\infty$，$(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t} \le (\ln t)^k t^{\beta-1}e^{-t}$.

一致收敛.

③ $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} t^s e^{-t}\,dt$

$= -\int_0^{+\infty} t^s\,de^{-t}$

$= -t^s e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}s t^{s-1}\,dt$

$= s\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt$.

$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt$

$= n!\,e^{-t}\Big|_{+\infty}^0 = n!$

$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})$

$= (n-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2^n}(2n-1)\cdots 1\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt$　$t = x^2$.

$= \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-x^2}\,dx^2$

$= \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\,2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$

$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

> $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$.

① $B(p,q)$ 定义域 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$，对称且连续.

取 $a \in (0,1)$，$B(p,q) = \int_0^a t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt + \int_a^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$.

$t \to 0$，$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim t^{p-1}$，$p-1 > -1$ 收敛.

$t \to 1$，$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim (1-t)^{q-1}$，$q-1 > -1$ 收敛.

$1-t = u$，$B(p,q) = \int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,d(1-u)$

$= \int_0^1 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,du = B(q,p)$

在 I 上任取 (p_0, q_0).

取 $p_1 \in (0, p_0)$，$q_1 \in (0, q_0)$

对 $\forall p \ge p_1$，$q \ge q_1$，$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \le t^{p_1-1}(1-t)^{q_1-1}$ 对 $\forall t \in (0,1)$ √.

$\therefore \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$ 在 $[p_1,+\infty)$，$[q_1,+\infty)$ 一致收敛.

$\therefore \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$ 在 (p_0,q_0) 连续.

② $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$

$= \int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$.

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$.

$t = \frac{1}{1+z}$.　$1-t = \frac{z}{1+z}$.　$dt = -\frac{1}{(1+z)^2}dz$.　$z = \frac{1}{t}-1$

$B(p,q) = \int_{+\infty}^0 \left(\frac{1}{1+z}\right)^{p-1}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{q-1}\times\left(-\frac{1}{(1+z)^2}\right)dz$

$= \int_0^{+\infty}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q-2}(1+z)^2}\,dz = \int_0^{+\infty}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$.

③ $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}\,du$.

$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}u^{2p-1}e^{-u^2}\,du\int_0^{+\infty}v^{2q-1}e^{-v^2}\,dv$.

$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-u^2-v^2}\,du\,dv$.

$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\rho^{2p-1}\rho^{2q-1}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta$

$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\theta$.

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\int_0^{+\infty}\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}\,d\rho$.

$= B(p,q)\,\Gamma(p+q)$.