含参变量的积分

2022年2月27日 星期日　　下午2:46

一、含参变量的积分

1. 定义：设二元函数在区间 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，因此对于任给定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上 Riemann 积分定义了一个函数 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$.

2. 定理

① 连续性：若 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明：取 $u_0\in[\alpha,\beta]$，

$\because |\varphi(u)-\varphi(u_0)|=\left|\int_a^b f(x,u)\,dx-\int_a^b f(x,u_0)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,u)-f(x,u_0)|\,dx$

一致连续，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

当 $\rho((x_1,u_1),(x_2,u_2))<\delta$，$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon$.

当 $|u-u_0|<\delta$ 时，对 $\forall x\in[a,b]$，

有 $|f(x,u)-f(x,u_0)|<\varepsilon$，$x\in[a,b]$.

$\therefore |\varphi(u)-\varphi(u_0)|<(b-a)\varepsilon$.

$\therefore \varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

② 如果 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的积分满足 $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)\,dx\,du =\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx$.

③ 函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且对 u 有连续偏微商，则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且求导和积分运算可交换

$\varphi'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$.

3. 积分限含参变量的积分 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$.

① $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$a(u)$ 和 $b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $a\le a(u)$，$b(u)\le b$，则 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

② 设函数 $f(x,u)$ 在 I 连续且对 u 有连续偏微商，$a(u)$ 和 $b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，则 $\psi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可微，且有

$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx+f(b(u),u)\,b'(u) - f(a(u),u)\,a'(u)$.

---

1. 含参变量的积分.

设 $f(x,u)$ 在 $[a,b][\alpha,\beta]$ 连续，

对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$.

① 若 $f(x,u)$ 在 $[a,b][\alpha,\beta]$ 连续，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

证明：$f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 一致连续.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，$\rho((x_1,u_1),(x_2,u_2))<\delta$ 时，

$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

$\therefore |\varphi(u)-\varphi(u_0)|=\left|\int_a^b f(x,u)-f(x,u_0)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,u)-f(x,u_0)|\,dx \le (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon$.

$\therefore \lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\,dx=\int_a^b f(x,u_0)\,dx=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\,dx$

② $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，

则 $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)\,dx\,du=\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx$

③ $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，对 u 连续偏导，

则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 可微，

且 $\varphi'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$.

证明：$g(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx$

$\int_\alpha^u g(u)\,du=\int_\alpha^u\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}\,dx\,du =\int_a^b\int_\alpha^u\frac{\partial f}{\partial u}\,du\,dx =\int_a^b f(x,u)-f(x,\alpha)\,dx =\varphi(u)-\varphi(\alpha)$.

$\therefore g(u)=\varphi'(u)$.

$I=[a,b]\times[\alpha,\beta] \to [a,b]\times[\alpha,\beta)$.

结论依然成立.

例. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

令 $I(u)=\int_0^1\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}\,dx$.

被积 $\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$、偏微商 $\frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$ 在 $[0,1]^2$ 连续.

对 $\frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$ 积分：假设 $\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+ux}$.

$x=(Ax+B)(1+ux)+C(1+x^2)$

取 $x=i$，$i=(Ai+B)(1+ui)$

$B-uA=0$，$A+Bu=1$，$uA+Bu^2=u$.

$\therefore A=\frac{1}{1+u^2}$，$B=\frac{u}{1+u^2}$，$C=-\frac{u}{1+u^2}$.

$I'(u)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}\,dx =\frac{1}{1+u^2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{u}{1+x^2}-\frac{u}{1+ux}\right)dx =\frac{1}{1+u^2}\left[\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}u-\ln(1+u)\right]$

$I(1)=I(1)-I(0) =\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\left[\frac12\ln 2+\frac{\pi}{4}u-\ln(1+u)\right]du =\frac12\times\ln2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln 2-I(1)$.

另. $\ln(1+ux)=\int_0^u\frac{x}{1+xy}\,dy$

$I(u)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\left[\int_0^u\frac{x}{1+xy}\,dy\right]dx$

2. 积分限含参变量的积分.

① $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$a(u)$、$b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $\in[a,b]$，则 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

$\psi(u)=\int_a^{b(u)} f(x,u)\,dx-\int_a^{a(u)} f(x,u)\,dx$

取定 $u_0\in[\alpha,\beta]$，

$\int_a^{b(u)} f(x,u)\,dx=\int_a^{b(u_0)} f(x,u)\,dx+\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$

易知 $\int_a^{b(u_0)} f(x,u)\,dx$ 在 u_0 处连续.

$\exists M$ 使当 $(x,u)\in[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 时，$|f(x,u)|\le M$.

$\therefore \int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\,dx\le M|b(u)-b(u_0)|$.

$\because \lim_{u\to u_0} b(u)-b(u_0)=0$，$\therefore \lim_{u\to u_0}\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\,dx=0$. 连续.

$\therefore \lim_{u\to u_0}\psi(u)=\psi(u_0)$ 连续.

② $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续，$\frac{\partial f}{\partial u}$ 连续，$a(u)$、$b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可微

$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$

则 $\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx+f(b(u),u)\,b'(u)-f(a(u),u)\,a'(u)$.

$F(u,y,z)=\int_y^z f(x,u)\,dx$.

$\frac{\partial F}{\partial u}=\int_y^z\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx$.

$\frac{\partial F}{\partial y}=-f(y,u)$，$\frac{\partial F}{\partial z}=f(z,u)$.

$\because \psi(u)=F(u,a(u),b(u))$

$\psi'(u)=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}(a'(u))+\frac{\partial F}{\partial z}b'(u) =\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx+f(b(u),u)\,b'(u)-f(a(u),u)\,a'(u)$.

例. 设 $I(u)=\int_u^{u^2}\frac{\sin ux}{x}\,dx$，求 $I'(u)$.

$f(x,u)=\begin{cases}\frac{\sin ux}{x}, & x\ne0\\ u, & x=0\end{cases}$ 被积函数满足条件 本身 & 偏导连续.

易知 $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)=\cos ux$

$\therefore I'(u)=\int_u^{u^2}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,dx+f(u^2,u)\cdot2u-f(u,u)\cdot1$

$u\ne0$，$=\frac{\sin ux}{u}\Big|_u^{u^2}+\frac{2u\sin u^3}{u^2}-\frac{\sin u^2}{u}$

$u=0$，$I'(0)=0$.

例. (13.3 T4(3)). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx$.

$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx$.

$I(0)=\lim_{a\to0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx=\lim_{a\to0}\frac{ax}{x}=0$.

$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(a\tan x)^2}\,dx =\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+(at)^2)}\,dt =\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(b^2+t^2)}\,dt$

$\int\frac{1}{(1+t^2)(b^2+t^2)}\,dt$ 在 $b\ge b_0>0$ 上 $<\frac{1}{(t^2+1)b_0^2}$，一致 con.

$b\ne1$，$=\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2-1}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+b^2}\right] =\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2-1}\times\frac{\pi}{2}\left(1-\frac1b\right)=\frac{\pi}{2(a+1)}$. 连续.

$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C$.

例. (13.4 T7.(5))

3. 含参变量的反常积分

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ —— $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$

$S_n(x)$　　对每个 u 收敛，$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$

逐点收敛：对每个 u 各自都有

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $A>X$ 时，

$\left|\int_a^A f(x,u)\,dx-\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx\right| =\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon$.

一致收敛：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $A>X$ 时，

$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon$ 对 $\forall u$ 成立.

(2) 上确界 $\beta(A)=\sup\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|$

一致收敛 $\Leftrightarrow \lim_{A\to+\infty}\beta(A)=0$.

证明：$\Rightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $A>X$ 时，

$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon$ 对 $\forall u$ 成立.

$\therefore A>X$ 时，$\beta(A)\le\varepsilon$.

$\therefore \lim_{A\to+\infty}\beta(A)=0$.

$\Leftarrow$ $\lim_{A\to+\infty}\beta(A)=0$，$\exists X>a$，当 $A>X$ 时，

$\beta(A)<\varepsilon$.

$\therefore$ 对 $\forall u$，$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\beta(A)<\varepsilon$.

$\therefore \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 一致收敛

例. $\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\,dx$.

取 $A>a$.

$\int_A^{+\infty} ue^{-ux}\,dx=\begin{cases}0 & u=0\\ e^{-uA} & u>0\end{cases}$

则 $\beta(A)=\sup\left|\int_A^{+\infty} ue^{-ux}\,dx\right|=1$.

(3) 判别法

① Weierstrass：$f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 连续，若存在 $[a,+\infty)$ 可积的 $p(x)$ 使对 $\forall x>A$ 与 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 有 $|f(x,u)|\le p(x)$，则一致收敛.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>X_0$，使当 $A>X_0$ 时，$\int_A^{+\infty} p(x)\,dx<\varepsilon$.

则当 $A>X$ 时，

$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|\le\int_A^{+\infty}|f(x,u)|\,dx\le\int_A^{+\infty} p(x)\,dx<\varepsilon$

例. $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x\,dx$ 对 $\forall u\in[0,+\infty)$.

对 $\forall(x,u)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$

$|e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x|\le e^{-\alpha x}$ (控制)　u 为参数 放缩去掉.

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ 收敛.

$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x\,du$ 对 $\forall\alpha\in[0,+\infty)$.

对 $\forall(x,u)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$

$|e^{-(\alpha+u^2)x}\sin x|\le xe^{-u^2x}=\frac{x}{e^{u^2x}}\le\frac{1}{1+u^2}\le\frac{1}{u^2}$.　x 为参数. 去掉.

条件：u 充分大满足即可.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\,du$ 收敛. → 避开 $u=0$ 的瑕点

$\therefore \int_0^{+\infty}\cdots\,du$ 收敛.

② Dirichlet $f(x,u)$、$g(x,u)$ 对每个 $u\in J$，在 $x\in[a,+\infty)$ 任意 $[a,b]$ 上可积.

且 1° $\int_a^A f(x,u)\,dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界. $\exists M$，对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，$\left|\int_a^A f(x,u)\,dx\right|\le M$.

2° 对固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$g(x)$ 是 x 的单调函数，且 $x\to+\infty$ 时，关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致趋于 0.

$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\,dx\right| \le\left|g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\,dx\right|+\left|g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\,dx\right| \le 2M|g(A')|+2M|g(A'')|$.

$\exists M$，对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，$\left|\int_a^A f(x,u)\,dx\right|\le M$.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>a$，当 $x>A_0$ 时，$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$.

$\le 2M\times\frac{\varepsilon}{4M}+2M\times\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon$.

例. (1) 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ 在 $\beta\ge\beta_0>0$ 上的一致收敛性.

(2) 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ 在 $\beta>0$ 上的一致收敛.

(1) 取 $f(x,\beta)=\sin\beta x$，$g(x,\beta)=\frac{x}{\alpha^2+x^2}$.

$\left|\int_0^A f(x,\beta)\,dx\right|=\left|\int_0^A\sin\beta x\right|=\left|\frac{\cos\beta x}{\beta}\Big|_0^A\right|=\left|\frac{\cos\beta A}{\beta}\right|\le\frac{2}{\beta}\le\frac{2}{\beta_0}$

且当 $x\to+\infty$ 时 $g(x,\beta)=\frac{x}{\alpha^2+x^2}$. 取 $x\ge\alpha$，

$g(x,\beta)$ 单减且一致趋于零.

$\therefore$ 由 Dirichlet，$\int_0^{+\infty}\sin\beta x\frac{x}{\alpha^2+x^2}\,dx$ 一致收敛.

*命题：$f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 连续，若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 一致收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$、$\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\,dx$ 收敛.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，使当 $A''>A'>X$ 时，

$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon$. 对 $\forall u\in(\alpha,\beta)$ 成立

令 $u\to\alpha^+$，$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\alpha)\,dx\right|\le\varepsilon$　⇒ 分别收敛.

$u\to\beta^-$，$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\beta)\,dx\right|\le\varepsilon$

逆否：端点不收敛则积分不一致收敛.

(2) $\because \int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\,dx$ 在 $\beta=0$ 时不收敛，

$\left(\frac{x}{x^2+\alpha^2}=\frac{1}{x+\frac{\alpha^2}{x}}\sim\frac1x,\ x\to+\infty\right)$

$\therefore$ 由命题知 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\,dx$ 在 $\beta>0$ 不一致收敛.

③ Abel：$f(x,u)$、$g(x,u)$ 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，在 $[a,+\infty)$ 的任意区间上可积.

且 1° $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

2° 对每个固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$g(x,u)$ 对 x 单调且关于 u 一致有界.

$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\,dx\right| \le\left|g(A',u)\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\,dx\right|+\left|g(A'',u)\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\,dx\right|$

$\exists M>0$，对固定 u，对 $\forall x\ge a$，$|g(x,u)|\le M$.

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 一致收敛 ⇒ 部分和 → 0.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，当 $A_2\ge A_1\ge X$ 时，

$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)\,dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2M}$ 对 $\forall u$ 成立.

$\le M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$.

例. 设 $0<p\le1$，$\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$ 关于 u 在 $u\ge0$ 上一致收敛.

因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$ 关于 u 在 $u\ge0$ 上一致收敛，（平凡的）

且对每个固定 u，e^{-ux} 关于 $x\ge0$ 单减且一致有界.

$\therefore$ 由 Abel，$\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$ 关于 $u\ge0$ 一致收敛.

(4) 性质.

对 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$，一致收敛.

① $f(x,u)$ 在 $I=[a,+\infty)\times J$ 连续，则 $\varphi(u)$ 在 J 连续. ⇒ 极限与积分交换.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>a$，使 $A>X$ 时，$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

任取 $u_0\in J$，取定 $A>X$，

$\int_a^A f(x,u)\,dx$ 在 u_0 处连续（关于 u 的函数）

$\therefore \exists\delta>0$，使当 $|u-u_0|<\delta$，$u\in J$ 时有

$\left|\int_a^A f(x,u)\,dx-\int_a^A f(x,u_0)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

$\varphi(u)-\varphi(u_0)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx-\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\,dx$

$=\left|\int_a^A f(x,u)\,dx+\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx-\int_a^A f(x,u_0)\,dx-\int_A^{+\infty} f(x,u_0)\,dx\right|$

$\le\left|\int_a^A f(x,u)\,dx-\int_a^A f(x,u_0)\,dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x,u_0)\,dx\right|$

$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. 连续

② 积分号交换.

③ 积分与求导交换.

例. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$

S_1 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-ux}\,du$.

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\int_a^b e^{-ux}\,du\,dx$

$=\int_a^b\int_0^{+\infty} e^{-ux}\,dx\,du=\int_a^b\frac{e^{-ux}}{-u}\Big|_0^{+\infty}du =\int_a^b\frac{du}{u}=\ln\frac{b}{a}$.

能交换：$u\in[a,b]$ 时，$e^{-ux}\le e^{-ax}$，对 $\forall x\ge0$ 成立. 且 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$ 收敛.

Weierstrass，$\int_0^{+\infty} e^{-ux}\,dx$ 在 (a,b) 一致收敛.

S_2 $\int_\varepsilon^A\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\int_\varepsilon^A\frac{e^{-ax}}{x}\,dx-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-bx}}{x}\,dx$

$=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{e^{-t}}{t}\,dt =\int_{a\varepsilon}^{aA}-\int_{a\varepsilon}^{bA}+\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt =\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int_{aA}^{bA}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$

积分中值 $=e^{-\xi_1}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac1t\,dt-e^{-\xi_2}\int_{aA}^{bA}\frac1t\,dt$

$=(e^{-\xi_1}-e^{-\xi_2})\ln\frac{b}{a}$

$\varepsilon\to0$，$\xi_1\to0$.　$A\to+\infty$，$\xi_2\to+\infty$.

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=(1-0)\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$.

S_3 $f(x,b)=\begin{cases}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} & x>0\\ b-a & x=0\end{cases}$

满足条件 $\frac{\partial f}{\partial b}=e^{-bx}$ 连续. 一致收敛.

令 $\varphi(b)=\int_0^{+\infty} f(x,b)\,dx$

$\varphi'(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial b}(x,b)\,dx=\int_0^{+\infty} e^{-bx}\,dx=\frac1b$.

$\therefore \varphi(b)=\ln b+C$，$\varphi(a)=0$，$\therefore \varphi(b)=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$

能交换：$b\ge c$ 时，$e^{-bx}\le e^{-cx}$ 对 $\forall x\ge0$ 成立.

且 $\int_0^{+\infty} e^{-cx}\,dx$ 收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-bx}\,dx$ 关于 b 在 $[c,+\infty)$ 一致收敛.

例. 计算 $I(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos2\beta x\,dx$.

$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt\pi}{2}$.

$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos2\beta x)\,dx =\int_0^{+\infty}-2xe^{-x^2}\sin2\beta x\,dx =\int_0^{+\infty}\sin2\beta x\,de^{-x^2}=e^{-x^2}\sin2\beta x\Big|_0^{+\infty}-2\beta\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos2\beta x\,dx =-2\beta I(\beta)$

$I(\beta)=Ce^{-\beta^2}$. $I(0)=\frac{\sqrt\pi}{2}$，$I(\beta)=\frac{\sqrt\pi}{2}e^{-\beta^2}$.

能交换：连续 ✓. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos2\beta x\,dx$ 收敛 ✓.

$|-2xe^{-x^2}\sin2\beta x|\le2xe^{-x^2}$. 对 β、x 成立.

(5) Euler 积分.

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$

① $\Gamma(s)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，且在 $(0,+\infty)$ 连续.

$\Gamma(s)=\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt+\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$

$t\to0^+$，$t^{s-1}e^{-t}\sim t^{s-1}$.　$t\to+\infty$，$t^{s-1}e^{-\frac t2}\le e^{\frac t2}$

$s>0$ 时收敛　$\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 收敛.

$\therefore \Gamma(s)$ 的定义域为 $s>0$.

$s=0$ 时不收敛 ⇒ 考虑 >0 的区间.

对 $\forall\beta>\alpha>0$，

若 $\alpha\le s\le\beta$，当 $0<t\le1$ 时，

$t^{s-1}e^{-t}\le t^{\alpha-1}$. 且 $\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt$ 收敛.

W- $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

任意 α、β ⇒ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

当 $1<t<+\infty$ 时，

$t^{s-1}e^{-t}\le t^{\beta-1}e^{-t}$，同理一致收敛.

$\therefore \Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛，连续.

② $\Gamma(s)$ 有任意阶导数，$\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$.

能交换求导积分顺序.

检验导数一致连续性.

$\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$：$|t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k|\le t^{\alpha-1}e^{-t}(\ln t)^k$.

一致 con.　$t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}}(\ln t)^k\le t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}$.

$\therefore \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$ 一致收敛.

$\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$：$|t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k|\le t^{\beta-1}e^{-t}(\ln t)^k$.

一致 con　$t^{\beta-1}e^{-t}(\ln t)^k\le e^{-\frac t2}$. 一致收敛.

③ $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} t^s e^{-t}\,dt =-t^se^{-t}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt=s\Gamma(s)$.

$\Gamma(s+1)=s(s-1)\cdots(s-n+1)\Gamma(s-n+1)$

$n-1<s\le n$，$0<s-n+1\le1$.

$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt=1$. $\Gamma(n+1)=n!$

$\Gamma(\frac12)=\int_0^{+\infty} t^{\frac12-1}e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty} t^{-\frac12}e^{-t}\,dt =2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt\pi$.

$\Gamma(n+\frac12)=(n-\frac12)(n-\frac32)\cdots\frac12\Gamma(\frac12) =\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\times1}{2^n}\sqrt\pi$

④ 余元公式. $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=B(1-s,s)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt$.

$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$.

① $B(p,q)$ 在 $I=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 对称且连续.

$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt =\int_0^a t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt+\int_a^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$

$t\to0^+$，$t^{p-1}(1-t)^{q-1}\sim t^{p-1}$，收敛，$p-1>-1$.　$t\to1^-$，$t^{p-1}(1-t)^{q-1}\sim(1-t)^{q-1}$，收敛，$q-1>-1$.

$\therefore$ 收敛域 $p>0$，$q>0$

取 $0<p_0<p$，$0<q_0<q$，$p\ge p_0$，$q\ge q_0$ 时，

……

例. $f(x)\ge0$ 在 $[a,+\infty)$ 任意有限区间可积，$\{a_n\}$ 单增，$a_n\to a$.

证明：$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛于 l $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx$ 收敛于 l.

证明：必证两者等价. $S_n=\int_a^{a_n} f(x)\,dx=\sum\cdots$.

⇒ 如果 $\{S_n\}$ 收敛，则 $\exists M$ 使 $S_n\le M$ 对切 n 成立.

$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，对 $\forall A>a$，$\exists N$，使 $a_N>A$.

$\therefore \int_a^A f(x)\,dx\le\int_a^{a_N} f(x)\,dx=S_N\le M$

⇐ 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，

则 $\int_a^A f(x)\,dx$ 有上界 M，

对 $\forall n$ 有 $S_n=\int_a^{a_n} f(x)\,dx\le M$.

$\therefore S_n$ 收敛.

例. $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$ 收敛，但 $\frac{x}{1+x^6\sin^2x}$ 非负连续无界.

取 $a_n=n\pi$.

$b_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}\,dx\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(n+1)\pi\,dx}{1+(n\pi)^6\sin^2x}$

$=(n+1)\pi\times2\int_0^{\frac\pi2}\frac{1}{1+(n\pi)^6\sin^2x}\,dx$

$\le2(n+1)\pi\int_0^{\frac\pi2}\frac{1}{\cos^2x+(n\pi)^6\sin^2x}\,dx$

$=2(n+1)\pi\int_0^{\frac\pi2}\frac{\sec^2x}{1+(n\pi)^6\tan^2x}\,dx$

$=2(n+1)\pi\int_0^{\frac\pi2}\frac{1}{1+(n\pi)^6t^2}\,dt$

$=2(n+1)\pi\int_0^{\frac\pi2}\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{(n+1)\pi^2}{(n\pi)^3}\le\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{n^2}$.

$\therefore \sum b_n$ 收敛.

* $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^\alpha\sin^2x}$ 的收敛性.

$b_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2x}\,dx\le(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2x}$

$\le2(n+1)\pi\int_0^{\frac\pi2}\frac{dx}{\cos^2x+(n\pi)^\alpha\sin^2x}$

$=2(n+1)\pi\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha t^2}$

$=\frac{2(n+1)\pi}{(n\pi)^{\frac\alpha2}}\times\frac\pi2\le\frac{2\pi^2}{\pi^{\frac\alpha2}}\cdot\frac{1}{n^{\frac\alpha2-1}}$.

$\sum b_n$ 收敛，$\frac\alpha2-1>1$，$\alpha>4$.

$\alpha\le0$ 时，$b_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2x}\,dx\ge\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+\sin^2x}\,dx\cdot n\pi$.

$=n\pi\int_0^\pi\frac{dx}{1+\sin^2x}$ (常数)，发散.

$0<\alpha<4$ 时，$b_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2x}\,dx$

$\ge n\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+[(n+1)\pi]^\alpha\sin^2x}$

$=2n\pi\int_0^{\frac\pi2}\frac{dx}{\cos^2x+[((n+1)\pi)^\alpha+1]\sin^2x}$

$=2n\pi\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+[((n+1)\pi)^\alpha+1]t^2}$

$=\frac{2n\pi}{\sqrt{1+[(n+1)\pi]^\alpha}}\times\frac\pi2=C_n\sim\frac{\pi^{2-\frac\alpha2}}{n^{\frac\alpha2-1}}$.

$\sin x\le x$，$b_n\ge n\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+((n+1)\pi)^\alpha x^2}$

$=\frac{2n\pi}{\sqrt{[(n+1)\pi]^\alpha}}\arctan\left[\frac\pi2[(n+1)\pi]^{\frac\alpha2}\right]$ → $\frac\pi2$.

例. 研究下列广义积分的收敛性.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^\alpha}\,dx$. $(a\ne0)$.

不妨设 $a>0$ (奇).

$x\to0^+$ 时，$\frac{\arctan ax}{x^\alpha}\sim\frac{ax}{x^\alpha}=\frac{a}{x^{\alpha-1}}$.

$\alpha-1<1$ 时，收敛.

$x\to+\infty$ 时，$\frac{\arctan ax}{x^\alpha}\sim\frac\pi2\frac{1}{x^\alpha}$.

$\alpha>1$ 时，收敛.

……

(5) Laplace 积分

例. Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

例. 研究下列积分的条件收敛和绝对收敛.

例. 研究含 1 区间的一致收敛性.

例. 不满足 Weierstrass 但可一致收敛.