反常积分

2022年2月21日 星期一　　下午3:44

一、无穷区间上的积分

1. 收敛性定义

① $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，指 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任意有限区间上可积，

并且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 极限存在。

② 定义 $F(A)=\int_a^A f(x)dx$。

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty}$ 有极限。

2. 判定准则，定理。

① Cauchy 收敛准则。

对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>a$，只要 A'，$A''>A_0$，

就有 $|F(A'')-F(A')|=\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$。

等价于函数在充分大处任意有限区间上的积分充分小（不一定 $f(x)\to 0$）。

② $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

绝对收敛，条件收敛。

③ 非负函数积分有界。

设在 $[a,+\infty)$ 上 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\Leftrightarrow \exists M>0$，使对 $\forall A>a$，有 $\int_a^A f(x)dx<M$。

④ 比较判别法。

$f(x)$ 和 $g(x)$ 对充分大的 x，$0\le f(x)\le g(x)$。

若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

例. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ 收敛，$\alpha\in\mathbb{R}$。

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}=0$。 $x^\alpha e^{-x}=x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}<e^{-\frac{x}{2}}$。

$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$ 收敛，$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}dx$ 收敛。

比较判别法极限形式。

$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$。

$k=c$，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散。

$k=0$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

$k=+\infty$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

常与 $g(x)=\frac{1}{x^p}$ 比较。

例. $\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$ 收敛。

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}=\lim\frac{x^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{9}{2}}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\to 0$。 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛。

3. 一般判别法

⓪ 引理：第二积分中值定理。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

1° $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且单调递减

$\Rightarrow \exists\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$

2° $g(x)$ 在 $[a,b]$ 非负单增

$\Rightarrow \exists\eta\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx$。

3° $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调 $\Rightarrow \exists\xi\in[a,b]$，

使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$。

证明：$g(x)$ 单调 $\Rightarrow$ 可积，$f(x)g(x)$ 可积。

对 $[a,b]$ 作分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$。

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx$

$=\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$

$+\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))dx$。

记 $g(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 振幅为 w_i。

则 $\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)||g(x)-g(x_{i-1})|dx\le \underline{K}\sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i$。（可积。）

$g(x)$ 可积，$\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i=0$。

$\therefore \int_a^b f(x)g(x)dx=\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$。

记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$F(x_k)=\sum\limits_{i=1}^k\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$。

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，有 $m\le F(x)\le M$。

由引理，$g(x_0)\ge g(x_1)\ge\cdots\ge g(x_n)\ge 0$。

$\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=\sum\limits_{i=1}^{n-1}F(x_i)[g(x_{i-1})-g(x_i)]+F(b)g(x_{n-1})$

$\therefore m\cdot g(a)\le\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\le M\cdot g(a)$。

$|T|\to 0$，$m\cdot g(a)\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\cdot g(a)$。

$F(x)$ 连续，介值定理，

$\exists\xi\in[a,b]$，$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$

① Dirichlet 判别法。

若 i) $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 作为 b 的函数在 $[a,+\infty)$ 有界

ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，

则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

② Abel 判别法。

若 i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

二、无界函数积分的收敛判别法。

1. Cauchy 收敛准则。

设 a 是 $f(x)$ 的瑕点。积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<\eta'$，$\eta''<\delta$ 时，就有

$\left|\int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)dx\right|<\varepsilon$。

2. 条件收敛与绝对收敛。

3. 控制收敛。

4. 比较判别法。

一、无穷积分

1. 定义：$F(A)=\int_a^A f(x)dx$，

$\int_a^{+\infty} f(x)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$

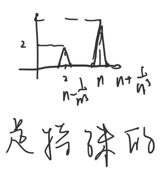
2. 收敛：

① 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>a$，A_1，$A_2>A_0$，

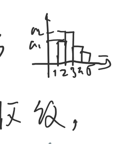
$|F(A_1)-F(A_2)|=\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$。

② 类比级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，a_n 通项 $\to 0$。

但 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$f(x)$ 不一定 $\to 0$。

反例.  $a_n=\frac{1}{n^3}\times n=\frac{1}{n^2}$，$\sum a_n$ 收敛

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$f(n)=n$。

而 $\sum a_n$ 是特殊的积分 

③ 绝对收敛 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，

由 Cauchy 推出本身收敛。$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx$

条件收敛 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散但本身收敛。

④ 部分积分有界，$A\to\infty$，收敛。

3. 判别

① 对充分大 x，$0\le f(x)\le g(x)$，则

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

$\int_a^A f(x)dx\le\int_a^A g(x)dx\le M$。

可得：绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛。

$0\le f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|$。

例. 对 $\forall\alpha$，$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ 收敛。

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}dx=0$

则存在 $X>1$，当 $x>X$ 时，$x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}<1$

$\therefore x^\alpha e^{-x}<e^{-\frac{x}{2}}$。比较 $\Rightarrow$ 收敛。

② $f(x)$，$g(x)$ 非负，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$。

k 为常数，则同敛散。

$k=0$，$f(x)\ll g(x)$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow f$ 收

$k=+\infty$。

$\Rightarrow g(x)=\frac{1}{x^p}$。$p>1$，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛

$p\le 1$，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散。

例. $\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}dx$

$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}\sim\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$，$x\to+\infty$ 时。

* 引理：第二积分中值

1° $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$。$g(x)$ 非负单减。

作分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$。

$\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx$

$=\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx+\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x)-g(x_{i-1})]dx$

$w_i=\sup\{|g(x)-g(x')|\,|\,x\in[x_i,x_{i-1}]\}$。

$\therefore\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x)-g(x_{i-1})]dx<K\sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i$。

$g(x)$ 可积，$\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i=0$，

$\therefore\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$

记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，连续且有最值 m，M。

$\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})[F(x_i)-F(x_{i-1})]$

$=\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})F(x_i)-\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(x_i)F(x_i)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)]F(x_i)+g(x_{n-1})F(b)$

$\le\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)]+g(x_{n-1})\right)\cdot M=g(a)M$。

$\therefore mg(a)\le\sum\limits_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\le Mg(a)$。

$g(a)=0$，原式 $=0$

$g(a)\ne 0$，$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)}\le M$。连续，介值

$\exists\xi\in[a,b]$ 使 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)}=F(\xi)$。

$\therefore\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$。

2° $g(x)$ 非负单减。$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx$。

令 $x=a+b-t$，$g(x)=g(a+b-t)=g_1(t)$，$f(x)=f_1(t)$。

$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)dt$

$g_1(a)\int_a^\xi f_1(t)dt=g(b)\int_{a+b-\xi}^b f(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx$。

3° $\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$

令 $h(x)=g(b)-g(x)$，$g(x)\uparrow$。

则 $h(x)\downarrow$，$h(x)\ge 0$

$\int_a^b h(x)f(x)dx=\int_a^b(g(b)-g(x))f(x)dx=(g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)dx$

$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_a^b f(x)dx-[g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)dx$

$=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$

③ Dirichlet 判别法。

1° $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 作为 b 的函数在 $[a,+\infty)$ 有界

2° $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$。

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx=g(A)\int_A^\xi f(x)dx+g(A')\int_\xi^{A'} f(x)dx$

$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|\le|g(A)|\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|+|g(A')|\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|$

有界 $\Rightarrow$ 对 $\forall b>a$，$|F(b)|\le M$。

极限 $\Rightarrow x>X$，$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$。

$\therefore\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|\le|g(A)|\cdot 2M+|g(A')|\,2M$

$<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon$。

④ Abel 判别法

1° $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

2° $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界。

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|\le|g(A)|\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|+|g(A')|\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|$

有界 $\Rightarrow |g(x)|\le M$

收敛 $\Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$。

$\therefore\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|\le M\cdot\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|+M\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|$

$<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}$。

另证：不妨设 $g(x)$ 单减。$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$。

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)[g(x)-l]dx+l\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$F(b)=\int_a^b f(x)dx$，$\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ 收敛。

$\therefore\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

例. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$。

$\int_a^{+\infty} g(x)\sin x\,dx$，$\int_a^{+\infty} g(x)\cos x\,dx$。

$\left|\int_a^b\sin x\,dx\right|=|\cos b-\cos a|\le 2$　Dirichlet。

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$。

例. $a>0$，$0<p\le 1$。$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 和 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 都条件收敛。

收敛：上一题的结论，本身收敛。

/或用分部积分。

条件收敛：$\frac{|\sin x|}{x^p}\ge\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1-\cos 2x}{2x^p}$。

$\int_a^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx$ 发散，

$\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx$ 收敛，

$\therefore\int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ 发散，$\int_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$ 发散。

例. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}$ 的绝对收敛和条件收敛情况。

S1. $\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}=\frac{\cos n\cos\frac{1}{n}}{n}-\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}$

$\left|\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}\right|\le\frac{1}{n^2}$。（$|\sin x|\le|x|$）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛（Dirichlet），$\cos\frac{1}{n}$ 单增 $\to 1$，

$\therefore\sum\frac{\cos n\cos\frac{1}{n}}{n}$ 收敛。

又 $\sum\left|\frac{\cos n}{n}\right|$ 发散，$\therefore$ 条件收敛。

S2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{n}-\frac{2\sin\frac{1}{2n}\sin(n+\frac{1}{2n})}{n}\right]$

⇑

作差：$\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}-\frac{\cos n}{n}=\frac{2\sin\frac{1}{2n}\sin(n+\frac{1}{2n})}{n}$

差值绝对收敛。

则收敛情况一样。

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 均可转换。

二、无界积分

1. 定义：a 为 $f(x)$ 的瑕点

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)dx$

也可处理为 $y=\frac{1}{x-a}$，$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2}dy$。

2. 收敛判定。

① Cauchy。

② 绝对 & 条件。

③ 比较。

④ 比值。与 $g(x)=\frac{1}{(x-a)^p}$ 比较。

$0<p<1$，$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$ 收敛

$p\ge 1$，$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$ 发散。

例. $k\in(0,1)$，$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}\sqrt{1-x}}$

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ 收敛，$\therefore$ 原收敛。

或 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$。

例. $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-(1-x))}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(1-t)}{t}=-\frac{1}{2}$。

$\therefore 1$ 不是瑕点，0 是瑕点。

$x\to 0^+$，$\frac{\ln x}{1-x^2}\sim\ln x$，且 $\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx=-1$。

$\therefore$ 原积分收敛。

例. $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx$　$(\beta\ge 0)$

$x=0$ 可能是瑕点可能不是。

$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx=\int_0^1\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}dx$

收敛则两部分都收敛。

$(0,1)$，$\beta>0$，$\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}\sim\frac{x^{\alpha+1}}{2}$

$\beta=0$，$\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}\sim\frac{x^{\alpha+1}}{3}$。

$\int_0^1 x^{\alpha+1}dx$ 在 $\alpha+1>-1$ 时收敛。

$(1,+\infty)$，$\beta>0$，$\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$。

$\beta=0$，$\frac{x^\alpha\arctan x}{2+x^\beta}\sim\frac{\pi}{6}x^\alpha=\frac{\pi}{6}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$。

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}dx$ 在 $\beta-\alpha>1$ 时收敛。

$\therefore\alpha>-2$ 且 $\beta>\alpha+1$ 时收敛。

注：反常积分处理方法通用。

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}x\,dx$

↓

$x\ln x\Big|_0^{\cdot}$。　$x\ln\sin x=x(\ln x+\ln\frac{\sin x}{x})$

例. 对 $\forall\beta>0$，反常积分 $\int_\beta^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛。

其中 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=A$。

求证：$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=A\ln\frac{\beta}{\alpha}$。

[不可写 $\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{f(\beta x)}{x}$（发散）]

不妨设 $\alpha>\beta>0$。可有 $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}$

$=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(\alpha x)}{x}dx-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(\beta x)}{x}dx$

$=\int_{\alpha\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{\beta\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\frac{f(t)}{t}dt$

$\exists\xi_\varepsilon\in[\alpha\varepsilon,\beta\varepsilon]$ 介值。$=f(\xi_\varepsilon)\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\frac{dt}{t}=f(\xi_\varepsilon)\ln\frac{\beta}{\alpha}$。

$m_\varepsilon\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\frac{1}{t}dt\le\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\frac{f(t)}{t}dt\le M_\varepsilon\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\frac{1}{t}dt$。

$\varepsilon\to 0$，原式 $\to A\ln\frac{\beta}{\alpha}$。

例. $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$

$x^2=t$，$\int_0^{+\infty}\sin t\,d\sqrt{t}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛。

且没连续。

例. $\int_0^{+\infty}x\sin x^3dx$

$x^3=t$，$\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{3}}\sin t\times\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{3}}}dt$。

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

$=\int_0^{+\infty}-\sin^2 x\,d\frac{1}{x}=\frac{-\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx$

$=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d2x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收。

例.（P3.T15）$g(x)=f(x)-2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$

证明 $\int_0^{+\infty}g^2(x)dx=\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$

令 $F(x)=\int_0^x e^t f(t)dt$

易知 $F(0)=0$，$F'(x)=e^x f(x)$。

$\therefore\int_0^A g^2(x)dx=\int_0^A[f(x)-2e^{-x}F(x)]^2dx$

$=\int_0^A f^2(x)dx-4\int_0^A e^{-x}f(x)F(x)dx+4\int_0^A e^{-2x}F^2(x)dx$

$=\int_0^A f^2(x)dx-2\int_0^A e^{-2x}\cdot 2e^x f(x)F(x)dx+4\int_0^A e^{-2x}F^2(x)dx$

$=\int_0^A f^2(x)dx-2\int_0^A e^{-2x}d(F^2(x))+4\int_0^A e^{-2x}F^2(x)dx$

$=\int_0^A f^2(x)dx-2e^{-2x}F^2(x)\Big|_0^A-4+4\int_0^A e^{-2x}F^2(x)dx$

需要证 $\frac{F(A)}{e^A}\to 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f(t)dt}{e^x}=0$。

$\int_0^x(e^t f(t))^2dt\le\int_0^x e^{2t}dt\cdot\int_0^x f^2(t)dt$（柯西）。

不妨 $f(x)\ge 0$。

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>0$，使当 $A''>A'>A_0$ 时，$\int_{A'}^{A''}f^2(x)dx<(\frac{\varepsilon}{2})^2$。

记 $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx=m>0$。

$0\le\frac{\int_0^x e^t f(t)dt}{e^x}=\frac{\int_0^{\frac{x}{2}}e^t f(t)dt}{e^x}+\frac{\int_{\frac{x}{2}}^x e^t f(t)dt}{e^x}$

$\le\frac{\sqrt{\int_0^{\frac{x}{2}}e^{2t}dt\int_0^{\frac{x}{2}}f^2(t)dt}}{e^x}+\frac{\sqrt{\int_{\frac{x}{2}}^x e^{2t}dt\int_{\frac{x}{2}}^x f^2(t)dt}}{e^x}$

$\int_0^{\frac{x}{2}}f^2(t)dt<m$，$\int_{\frac{x}{2}}^x f^2(t)dt<(\frac{\varepsilon}{2})^2$

$\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}(e^x-1)<e^x$

$\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_{\frac{x}{2}}^x=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^x)<e^{2x}$。

$<\frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{m}}{e^x}+\frac{e^x\cdot(\frac{\varepsilon}{2})}{e^x}$。

$\exists X_0>\frac{A_0}{2}$，使当 $x>\frac{X_0}{2}$ 时，$\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}\sqrt{m}<\frac{\varepsilon}{2}$。

$\therefore$ 原式 $<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。